NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Jacques HADAMARD,

PROFESSEUR ADJOINT A LA SORBONNE,
PROFESSEUR SUPPLÉANT AU COLLÈGE DE FRANCE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Jacques HADAMARD.

INTRODUCTION.

La théorie générale, non seulement des équations différentielles, mais encore des problèmes de toute espèce auxquels l'Analyse moderne a donné naissance, a été fondée par le théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales d'une équation différentielle quelconque.

Cauchy lui-même et ses successeurs ont généralisé ce résultat de diverses manières : ils sont ainsi parvenus à définir les solutions cherchées et à les étudier *localement*, c'est-à-dire dans une région suffisamment restreinte entourant un point donné (ordinaire ou même singulier). Mais on se rend compte aujourd'hui de la distance qui existe entre une pareille étude et la connaissance *complète* de la solution; l'une des préoccupations principales des géomètres de notre époque est de sortir du domaine à la considération duquel les méthodes anciennes étaient ainsi forcément limitées.

Cette préoccupation a été la mienne, quoiqu'elle m'ait amené, de proche en proche, à certains travaux n'ayant plus avec elle aucun rapport direct. J'ai été conduit à y répondre dans deux sens très différents l'un de l'autre.

Les principaux sujets auxquels ont été consacrées mes publications scientifiques sont en effet les suivants :

Étude d'une fonction définie par une série de Taylor;

Propriétés des fonctions entières;

Fonction $\zeta(s)$ *de Riemann et fonctions analogues;*

Équations différentielles réelles;

Équations aux dérivées partielles, au point de vue de la Physique mathématique.

Les trois premiers forment un seul et même groupe de recherches, dérivant de l'étude de la série de Taylor et des fonctions de variables complexes; les deux derniers se rapportent, au contraire, exclusivement au domaine réel.

La série de Taylor a été l'instrument universel à l'aide duquel ont été résolus les problèmes les plus importants du Calcul intégral, au point de vue restreint dont nous avons parlé tout à l'heure. Réduites à ce qu'elles ont de plus frappant et de plus essentiel, les conclusions des recherches qui ont été entreprises à ce point de vue peuvent s'énoncer ainsi :

Tout problème de Calcul intégral dont les données sont analytiques admet une solution représentable, dans un domaine convenablement choisi, par une série de Taylor.

Si donc on s'astreint à considérer exclusivement des fonctions analytiques, — et ce point de vue, tout en ayant cessé, à juste titre, d'être considéré comme le seul auquel on doive se placer, conserve et conservera, sans doute, toujours une importance primordiale, — on peut dire que perfectionner l'étude de la série de Taylor, c'est perfectionner du même coup l'Analyse entière.

Si la connaissance d'une série entière était adéquate à la connaissance parfaite de la fonction f qu'elle représente, les problèmes dont j'ai parlé en commençant devraient être considérés comme résolus en principe. Il semble au premier abord qu'il pourrait en être ainsi, puisque la fonction f est complètement déterminée par un quelconque de ses développements de Taylor. Ce n'est pas, cependant, ce qui a lieu dans l'état actuel de la Science. Une série de Taylor, précisément en raison de sa grande généralité, ne donne de la fonction correspondante qu'une idée très incomplète.

L'importance d'une telle lacune résulte de ce que nous venons de dire. Le problème qui se pose est de la combler en apprenant, d'une part, à calculer la fonction f dans tout son domaine d'existence (et non plus seulement dans le cercle de convergence de la série), autrement dit à en effectuer le *prolongement analytique;* d'autre part, à en reconnaître les propriétés. Ce double problème est, d'ailleurs, indissolublement lié à la recherche

des points singuliers de f, puisque ceux-ci constituent, au point de vue de la théorie moderne des fonctions, la plus importante des propriétés de f, et que, d'autre part, leur connaissance est indispensable au prolongement analytique, ce prolongement devant nécessairement les éviter.

Lorsque je publiai (1888-1889) mes deux premières Notes au sujet du problème ainsi posé, on peut dire qu'il n'avait pas été abordé par les analystes. Un seul travail fait exception [1] : c'est une courte Note de M. Lecornu (*Comptes rendus*, t. CIV, 7 février 1887), où l'auteur énonce, sur la position du point singulier le plus rapproché de l'origine, un résultat que rend vraisemblable l'examen des cas les plus élémentaires [2]. M. Lecornu n'était pas arrivé à démontrer ce résultat : il n'aurait d'ailleurs pu le faire sans insister davantage sur la façon dont il fallait entendre l'énoncé; car, à un certain point de vue, le théorème ne serait pas exact (*voir* plus loin, Chap. I[er]). Au contraire, l'exactitude de la proposition, convenablement précisée, a été établie, mais beaucoup plus tard (1896), grâce aux travaux de M. Fabry.

L'état de la question n'avait pas changé en 1892, moment où mes recherches aboutirent à la publication de ma Thèse.

Il semblait, à cette époque, que ce genre de recherches ne devait pas être abordé : que les tentatives faites dans cette voie ne pouvaient aboutir, au prix de longs efforts, qu'à des résultats peu étendus et de forme extrêmement compliquée. Je ne me dissimulais pas la valeur de ces objections; mais j'ai pensé (et l'événement a justifié cette manière de voir) que s'y arrêter serait méconnaître l'importance de la série de Taylor, au point de vue qui a été expliqué plus haut : importance tellement fondamentale que nul résultat acquis sur ce point, si restreint ou si compliqué qu'il puisse paraître, ne doit être négligé.

En réalité, les énoncés obtenus dans les travaux qui se sont succédé

---

(1) Dans les importants Mémoires qu'il a publiés dès 1886 (et qui, malgré cela, n'ont été connus, en général, qu'assez récemment, en raison du peu de diffusion du Recueil dans lequel la plupart d'entre eux avaient paru), M. Lerch ne s'est pas placé au point de vue dont nous parlons : il s'est efforcé d'obtenir des développements de Taylor faisant apparaître d'une manière simple les propriétés qu'il avait en vue, et non de retrouver ces mêmes propriétés sur des développements non écrits exprès pour les mettre en évidence.

(2) En ce qui regarde ces cas élémentaires, le résultat en question avait été noté par M. Kœnig et se trouvait, d'autre part, implicitement contenu dans le Mémoire de M. Darboux : *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres.*

sur cette question ont été beaucoup plus satisfaisants qu'on ne pouvait l'espérer au premier abord ([1]).

Ainsi que je l'ai expliqué ailleurs (**7**) ([2]), il était, pour ainsi dire, fatal que le problème dont nous parlons fût abordé par deux classes de méthodes entièrement indépendantes l'une de l'autre. Cette dualité est une conséquence de la difficulté même de la question, de la trop grande généralité d'une fonction définie par un développement de Taylor tout à fait quelconque : généralité beaucoup plus étendue qu'il ne serait utile pour les applications et embrassant des cas extrêmement compliqués qui ne se rencontreront sans doute jamais dans la pratique. Malheureusement, si l'on essaye d'éliminer ces complications en considérant exclusivement des singularités de nature déterminée, on ne peut le faire, du moins actuellement, sans dépasser le but, sans exclure du raisonnement des catégories étendues de fonctions dont l'étude s'impose à l'Analyse. Si, au contraire, on laisse au problème toute sa généralité, on se trouve en présence de difficultés telles qu'elles ne pourront sans doute jamais être vaincues d'une manière entièrement satisfaisante.

Mon Travail de 1892 comprend des méthodes appartenant à l'une et à l'autre de ces deux catégories. Dans la première Partie, rien n'est supposé *a priori* sur la nature des singularités cherchées. Je montre comment, à lui seul, un traitement convenable des formules qui donnent les coefficients de $f(x+h)$ en fonction de ceux de $f(x)$ permet souvent de démontrer l'existence de points singuliers sur le cercle de convergence; comment même, de cette façon, on obtient une foule de cas dans lesquels on peut affirmer que le cercle de convergence est une ligne singulière.

On sait que cette dernière circonstance avait depuis longtemps préoccupé les mathématiciens. Elle avait été regardée comme un fait remarquable et exceptionnel. La découverte de fonctions possédant cette propriété avait coûté à des géomètres tels que Weierstrass et M. Darboux les plus grands efforts. D'assez nombreux exemples avaient toutefois été for-

([1]) Il arrive, d'ailleurs, que la complication des résultats diminue notablement lorsqu'on passe aux applications. C'est ainsi que la recherche des pôles d'une série de Taylor dépend de déterminants d'ordre élevé, formés à l'aide des coefficients. Lorsqu'on cherche, par ce moyen, à résoudre une équation, on constate que le calcul de ces déterminants n'est pas plus malaisé que celui des coefficients eux-mêmes.

([2]) Les chiffres entre parenthèses renvoient aux indications bibliographiques placées en tête des Chapitres.

més précisément, dans la plupart des cas, à l'aide de séries de Maclaurin. Dans ces divers exemples, l'existence de la coupure circulaire paraissait découler de propriétés toutes particulières de la fonction étudiée : c'était soit l'allure de cette fonction le long de la ligne singulière (Weierstrass, Darboux), soit son allure dans le voisinage de cette ligne (Lerch), soit encore une équation différentielle ou fonctionnelle vérifiée par cette fonction (Lerch, Méray, Fredholm) qui fournissait la conclusion demandée.

J'ai pu établir, pour la plupart de ces fonctions, dès 1892, que l'existence de la singularité en question était due à une cause unique et bien simple : la rareté de plus en plus grande des termes. Sans arriver, à cet égard, à un théorème aussi général que celui que j'avais en vue ([1]), j'ai montré que la coupure se présentait forcément dès que les termes de la série, au lieu de contenir toutes les puissances successives de la variable, étaient affectés d'exposants $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, de plus en plus éloignés les uns des autres, les différences $c_{n+1} - c_n$ augmentant avec une rapidité suffisante.

Auparavant, j'avais obtenu la même conclusion pour des cas d'une nature toute différente, puisqu'il s'agissait, cette fois, de séries dans lesquelles toutes les puissances de la variable peuvent être représentées, mais dans lesquelles les termes se partagent en différents groupes, entremêlés suivant une loi quelconque, et qui fournissent, indépendamment les uns des autres, les différents points singuliers.

La remarque qui m'avait servi à obtenir la plupart de ces résultats est, en effet, la suivante : dans les séries auxiliaires à la discussion desquelles conduit la question posée, on peut se borner à considérer certains groupes composés chacun d'un nombre fini de termes. La fécondité de ce principe a été prouvée par les importants résultats qui en ont été déduits dans les travaux qui ont suivi le mien : c'est lui qui est à la base d'une partie des raisonnements de M. Borel et de la plupart de ceux de MM. Fabry et Leau. On sait, en particulier, que son emploi conduit à considérer le cas où le cercle de convergence est une coupure comme la règle et non plus comme l'exception.

([1]) La proposition obtenue dans ma Thèse s'appliquait à tous les exemples qui viennent d'être rappelés, sauf celui de M. Fredholm. M. Borel, à qui j'avais fait part de mon sentiment relativement à la nécessité de généraliser cette proposition, a pu, par des méthodes toutes différentes (1896), lui donner une première extension qui embrassait la série de M. Fredholm. Le théorème fut peu après obtenu dans toute sa généralité par M. Fabry, perfectionnant, à cet effet, d'une manière extrêmement habile la méthode indiquée dans ma Thèse.

Dans les deux dernières parties de mon travail, je passe, au contraire, à la recherche de singularités de nature déterminée en commençant par le cas le plus simple, mais aussi le plus fréquent dans beaucoup d'applications, celui des singularités polaires.

Dans ce cas *la question reçoit une solution complète.* On peut suivre la fonction dans tout le plan, en calculer la valeur et trouver les affixes des différents pôles.

Aussi, quelque particulier que l'on puisse le juger, ce cas mérite-t-il de retenir l'attention. En fait, son étude a déjà conduit à un grand nombre de conséquences utiles. Pour n'en citer qu'une, les résultats obtenus donnent la résolution de toute équation algébrique ou transcendante dont le premier membre est une fonction régulière, et cela par des formules qui (au point de vue théorique bien entendu) sont plus simples qu'on ne pouvait l'espérer et devaient me permettre d'étudier avec une extrême facilité la distribution des racines de l'équation qui ont un module élevé.

Dans la dernière Partie, je reviens aux points singuliers situés sur la circonférence du cercle de convergence, pour les étudier en les classant d'après leur nature. L'étude à laquelle on est ainsi conduit est assez minutieuse, mais deux résultats se dégagent très simplement.

En premier lieu, moyennant une hypothèse toujours vérifiée dans les cas usuels, on peut former une série de polynomes qui converge vers la valeur de la fonction, non seulement à l'intérieur du cercle, mais en tout point non singulier de sa circonférence. Cette série est celle qui résulterait d'une suite d'opérations considérée par MM. Frobenius et Hölder. Ces savants avaient constaté que, si leur algorithme convergeait, il convergeait vers la valeur de la fonction, la convergence ne pouvant d'ailleurs avoir lieu que si les coefficients vérifiaient l'hypothèse à laquelle je faisais allusion tout à l'heure. Mais leurs méthodes ne leur permettaient nullement de dire si ces conditions étaient suffisantes pour qu'il y eût convergence et en quels points cette convergence avait lieu. Je donnais donc le premier exemple d'une série de polynomes déduite directement du développement de Maclaurin et convergente d'une part en tous les points où ce dernier est valable, d'autre part (du moins dans des cas très généraux) en une infinité de points où il est en défaut.

Secondement, l'introduction d'une certaine intégrale définie permet de trouver, d'une infinité de manières, une suite de nombres par lesquels on peut multiplier les coefficients successifs sans changer les singularités de la série.

Ce résultat est d'une simplicité inattendue, étant donnée la nature de la question. Mais, en même temps, il marque sur les précédents (ceux qui concernent les pôles exceptés) un progrès dont l'importance est évidente : il s'étend, en effet, non seulement à la circonférence de convergence, mais *à tout le plan*.

A partir de la publication de ma Thèse, l'attention des géomètres s'est portée sur ce sujet. Grâce aux travaux de MM. Borel, Fabry, Leau, Lindelöf, et à la découverte de M. Mittag-Leffler, cette théorie, qui n'existait pas en 1892, forme aujourd'hui un chapitre assez important de la Théorie des fonctions, celui de tous (avec la théorie des fonctions entières dont il va être question plus loin) qui, dans ces dernières années, a acquis à la Science le plus grand nombre de résultats. Une très grande partie de ceux-ci ont d'ailleurs été obtenus par le développement des méthodes mêmes que j'avais indiquées.

Je n'ai pas perdu de vue, dans la suite, cette catégorie de questions, et, en 1897, j'ai démontré, également par la considération d'une intégrale définie, un théorème qui fait connaître les singularités possibles de la série $\sum a_i b_i x^i$, quand on connaît celles de la série $\sum a_i x^i$ et de la série $\sum b_i x^i$. Cette proposition dérive évidemment du même principe que le théorème mentionné en dernier lieu; comme lui, elle offre cet avantage de s'appliquer *à toute l'étendue du plan*. Aussi, ce travail a-t-il attiré l'attention des géomètres sur le principe en question et provoqué une nouvelle série de recherches ayant pour objet d'en obtenir de nouvelles applications.

Fonctions entières. — Les formules démontrées dans ma thèse relativement aux singularités polaires ont trouvé une application immédiate dans un Mémoire auquel l'Académie a décerné, en 1892, le grand prix des Sciences mathématiques.

La question posée par l'Académie, et qui portait sur une fonction employée par Riemann, soulevait un problème général : celui du *genre* des fonctions entières.

On sait que la notion de genre est liée au théorème de Weierstrass, d'après lequel toute fonction entière $F(x)$ peut être mise sous forme d'un produit de facteurs (*facteurs primaires*)

$$F(x) = e^{G(x)} \prod_n \left[\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{P_n\left(\frac{x}{a_n}\right)} \right]$$

[où $G(x)$ est une nouvelle fonction entière et les P_n des polynomes] : décomposition analogue à celle d'un polynome en ses facteurs linéaires.

Si l'on peut s'arranger pour que les polynomes P_n soient tous de degré E au plus, la fonction $G(x)$ se réduisant elle-même à un polynome de degré égal ou inférieur à E, la fonction $F(x)$ est dite [1] *de genre* E. Il est nécessaire pour cela (mais non suffisant) que les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation $F(x) = 0$ ne soient pas trop rapprochées les unes des autres : la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{E+1}}$ doit être convergente.

M. Poincaré a donné, en 1883 (*Bull. de la Soc. math. de France*), une condition nécessaire pour qu'une fonction $F(x)$ soit de genre E; cette condition est que les coefficients du développement de $F(x)$ décroissent au moins aussi vite que les valeurs successives de $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{E+1}}}$.

Cette condition nécessaire était-elle LA condition nécessaire et suffisante pour que la fonction fût au plus de genre E? Étant donnée la manière compliquée dont les racines d'une équation dépendent de ses coefficients, il semblait hautement improbable que la réponse fût aussi simple, ni surtout qu'elle fût aisée à obtenir. C'était elle qui avait manqué à Halphen pour continuer les recherches qu'il avait commencées en 1883, sur les travaux de Riemann. La Commission [2] chargée de juger le concours de 1892 rappelait, dans son Rapport, l'exemple d'Halphen et faisait observer combien il semblait peu vraisemblable au premier abord que l'on pût donner une réciproque au théorème de M. Poincaré. De son côté, ce dernier, dans le Mémoire précédemment cité, après s'être posé une question étroitement liée à la précédente, celle de savoir si la dérivée d'une fonction de genre E, ou la somme de deux fonctions de genre E, est également du même genre, ajoutait : « Ces théorèmes, en admettant qu'ils soient vrais, seraient très difficiles à démontrer. »

Le problème qui consiste à déterminer le genre d'une fonction entière donnée par son développement en série de puissances se rattache d'une manière évidente aux recherches dont j'ai parlé jusqu'ici, puisque celles-ci ont pour objet général l'étude d'une série de Maclaurin donnée *a priori*.

---

(1) Il est sous-entendu que E doit être le plus petit entier satisfaisant aux conditions indiquées.

(2) M. Picard, rapporteur.

J'ai pu effectuer cette détermination en toute rigueur dans le Mémoire soumis au jugement de l'Académie.

Désormais, la théorie des fonctions entières est, au point de vue des zéros, toute parallèle à celle des polynomes. Le genre (ou, plus généralement, l'ordre de croissance) joue le rôle du degré, la distribution des zéros de la fonction étant en général réglée par ce genre comme le nombre des zéros d'un polynome par son degré.

Dans un article ultérieur (13), j'ai précisé et simplifié la loi qui donne la croissance du module de la fonction lorsqu'on donne la suite des coefficients et qui joue un rôle important dans ces recherches. Il suffit, pour obtenir cette loi :

1° De marquer les points qui ont pour abscisses les indices des coefficients et pour ordonnées les logarithmes de leurs modules;

2° D'entourer d'un polygone de Newton la figure ainsi formée;

3° De prendre la figure polaire réciproque de ce polygone par rapport à une parabole.

L'ordre de grandeur de la fonction est de la sorte lié, d'une manière très simple, à l'ordre de grandeur, non de tous les coefficients, mais des coefficients *principaux*, ceux qui correspondent au sommet du polygone de Newton et qui interviennent seuls dans la question, les termes correspondant à ces coefficients étant toujours plus grands en valeur absolue que les autres termes. Cette notion de coefficients principaux s'introduit naturellement dans presque toutes les questions relatives aux séries entières, et il en est de même, très probablement, du polygone de Newton qui, dans ce cas particulier, m'a servi à la définir.

Quant aux questions posées par M. Poincaré et relatives à la conservation du genre dans la dérivation ou dans les combinaisons linéaires, elles ne sont pas, il est vrai, résolues d'une façon tout à fait complète par les théorèmes dont je viens de parler, et ne sauraient, d'ailleurs, l'être par des méthodes de cette nature. Mais on peut dire qu'elles sont résolues en pratique. D'une part, en effet, les cas qui échappent aux méthodes précédentes sont tout exceptionnels, d'autre part, l'hésitation ne peut jamais être que d'une unité sur le genre cherché.

Fonction $\zeta(s)$ et fonctions analogues. — Le dernier anneau de la chaîne de déductions commencée dans ma Thèse et continuée dans mon Mémoire couronné aboutit à l'éclaircissement des propriétés les plus importantes de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Par la considération de cette fonction, Riemann détermine la loi asymptotique de fréquence des nombres premiers. Mais son raisonnement suppose : 1° que la fonction $\zeta(s)$ a des zéros en nombre infini; 2° que les modules successifs de ces zéros croissent à peu près comme $n \log n$; 3° que, dans l'expression de la fonction auxiliaire $\xi(t)$ en facteurs primaires, aucun facteur exponentiel ne s'introduit.

Ces propositions étant restées sans démonstration, les résultats de Riemann restaient complètement hypothétiques, et il n'en pouvait être recherché d'autres dans cette voie. De fait, aucun essai n'avait été tenté dans cet ordre d'idées depuis le Mémoire de Riemann, à l'exception : 1° de la Note précédemment citée d'Halphen, qui était, en somme, un projet de recherches pour le cas où les postulats de Riemann seraient établis; 2° d'une Note de Stieltjes, où ce géomètre annonçait une démonstration de la réalité des racines de $\xi(t)$, démonstration qui n'a jamais été produite depuis.

Or les propositions dont j'ai rappelé tout à l'heure l'énoncé ne sont qu'une application évidente des théorèmes généraux contenus dans mon Mémoire.

Une fois ces propositions établies, la théorie analytique des nombres premiers put, après un arrêt de trente ans, prendre un nouvel essor; elle n'a cessé, depuis ce moment, de faire de rapides progrès.

C'est ainsi que la connaissance du genre de $\zeta(s)$ a permis, tout d'abord, à M. von Mangoldt d'établir en toute rigueur le résultat final du Mémoire de Riemann. Auparavant, M. Cahen avait fait un premier pas vers la solution du problème posé par Halphen; mais il n'avait pu arriver complètement au but : il fallait, en effet, pour achever de construire d'une façon inattaquable le raisonnement d'Halphen, prouver encore que la fonction ζ n'avait pas de zéro sur la droite $R(s) = 1$.

J'ai pu vaincre cette dernière difficulté en 1896, pendant que M. de la Vallée-Poussin parvenait de son côté au même résultat. La démonstration que j'ai donnée est d'ailleurs de beaucoup la plus rapide et M. de la Vallée-Poussin l'a adoptée dans ses publications ultérieures. Elle n'utilise que les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$.

En même temps, j'étendais le raisonnement aux séries de Dirichlet et, par conséquent, déterminais la loi de distribution des nombres premiers dans une progression arithmétique quelconque, puis je montrais que ce raisonnement s'appliquait de lui-même aux formes quadratiques à déterminant négatif. Les mêmes théorèmes généraux sur les fonctions entières

ont permis, depuis, à M. de la Vallée-Poussin d'achever ce cycle de démonstrations en traitant le cas des formes à $b^2 - ac$ positif.

Équations différentielles réelles et trajectoires de la Dynamique. — Sans se détourner entièrement des problèmes dont il est question dans ce qui précède, mon attention s'est, d'autre part, trouvée de plus en plus attirée par le domaine réel et l'étude, dans ce domaine, des équations différentielles.

La question, à cet égard, avait été posée par les célèbres Mémoires de M. Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Un cas s'était offert à ce géomètre, celui des équations du premier ordre et du premier degré, où cette question avait pu être résolue ; je veux dire où il avait pu décrire, au point de vue qualitatif et topologique, toutes les formes possibles de trajectoires.

Ce résultat était resté unique. Appliquées aux autres types d'équations différentielles, les méthodes de M. Poincaré lui avaient fourni une série de conséquences d'une grande importance, mais ne l'avaient pas mené jusqu'à une solution complète. Aucun autre géomètre n'avait, depuis, été plus heureux à cet égard (1). Bien peu d'entre eux s'étaient même engagés dans la voie ouverte par M. Poincaré.

Une question posée par l'Académie pour l'année 1896 (concours du prix Bordin) me fournit l'occasion de présenter les premières applications d'une méthode générale extrêmement simple, fondée sur la considération du maximum ou du minimum d'une fonction quelconque V des inconnues considérées et de leurs dérivées (autrement dit, de l'état du système, si l'on emploie le langage de la Dynamique).

Outre la démonstration de l'instabilité de l'équilibre dans tous les cas où la fonction des forces n'est pas maxima (et où l'absence de maximum se reconnaît dès l'inspection des termes quadratiques), question déjà traitée, à mon insu, par M. Liapounoff, ce principe me fournit des renseignements sur les courbes définies par les équations différentielles, non seulement dans le voisinage d'un point déterminé, mais dans l'ensemble de leur parcours (2). Appliqué aux équations de la Dynamique, il conduit à

(1) Je laisse de côté le cas des équations linéaires, où les problèmes qui se posent ne sont pas les mêmes.

(2) C'est par là surtout que la méthode dont je parle me paraît réaliser un progrès important sur celles de MM. Liapounoff et Kneser, lesquelles sont, à ce caractère près, entièrement analogues à la mienne. C'est grâce à cet avantage que celle-ci a pu, par la suite, me donner des résultats très différents de ceux qu'avaient obtenus les auteurs précédents.

la notion simple de *région attractive*, où toute trajectoire doit forcément passer. Appliqué aux surfaces à courbure positive, il donne le théorème simple :

Sur une surface à courbure partout positive, toute géodésique fermée est coupée une infinité de fois par toute autre géodésique.

Le Mémoire qui contenait ces propositions fut couronné par l'Académie. La Commission, dans son rapport, exprima la conviction que les idées qui y étaient exposées se montreraient, dans la suite, fécondes en résultats.

J'espère avoir répondu, dans une certaine mesure, à ce vœu de la Commission, dans un Mémoire paru quelque temps après et qui fut également l'objet d'un rapport de M. Poincaré : ce Mémoire est consacré aux *géodésiques des surfaces à courbure négative.*

Dans ce cas, en effet, la méthode précédente donne, non plus des résultats partiels, mais une solution complète (au point de vue qualitatif) de la question posée, pourvu qu'on lui adjoigne une considération d'une importance fondamentale, celle de l'*ordre de connexion* de la surface.

Ici se confirme la conclusion qui se dégage des Mémoires de M. Poincaré, à savoir, que l'*Analysis situs* doit être mise à la base de la théorie des équations différentielles réelles, comme elle est, depuis Riemann, à la base de l'étude des fonctions algébriques.

L'*Analysis situs*, entendue au point de vue de Riemann, apparaît ainsi comme un complément nécessaire de la Géométrie analytique de Descartes, je veux dire de la représentation d'un continu mathématique quelconque par des coordonnées. Cette dernière, en effet, qui nous permet de soumettre à l'analyse mathématique tous les problèmes relatifs à un champ de variabilité continue, nous fournit une image fidèle de toute partie suffisamment restreinte du champ considéré; mais l'intervention de l'*Analysis situs* s'impose lorsqu'on tient à embrasser l'ensemble de ce champ.

Si l'on tient compte, et du principe auquel je faisais allusion tout à l'heure (celui qui conduit à la notion de région attractive) et de la nature topologique de la surface, la solution du problème devient intuitive et s'obtient sans le moindre appareil de calcul. La marche de cette solution appelle toutefois quelques remarques.

Elle repose sur la détermination de géodésiques fermées. Ainsi, conformément à une parole de M. Poincaré (¹), les solutions périodiques se

(¹) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.

montrent encore une fois « la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place réputée jusqu'ici inabordable ». On peut même exprimer, d'une manière plus précise, leur rôle dans la question actuelle en disant qu'elles constituent une sorte de *système de coordonnées* auquel on rapporte toutes les autres trajectoires.

En effet, une fois obtenues toutes les géodésiques fermées, on leur rattache aisément les géodésiques asymptotiques aux premières et les géodésiques qui s'en vont à l'infini [1]; puis on en déduit la forme que doivent présenter, *si elles existent*, les solutions qui ne rentrent dans aucune de ces trois catégories.

Reste à savoir si de telles solutions existent véritablement. Ici intervient une méthode d'une nature nouvelle et qui montre pour la première fois, dans une question de Géométrie, la nécessité de la *théorie des ensembles transfinis* de M. Cantor. Cette méthode consiste à *compter* (au sens transfini du mot) les géodésiques précédemment énumérées et à constater qu'il n'y en a pas *assez* pour constituer l'ensemble total des courbes cherchées.

Mais il y a plus : non seulement la théorie des ensembles m'a seule permis d'arriver au but, mais la notion que l'on est ainsi conduit à mettre en évidence est une de celles dont la découverte a été l'un des résultats les plus inattendus et les plus paradoxaux de cette théorie, à savoir : la notion d'*ensemble parfait non continu*. Les tangentes menées, par un point de la surface, aux géodésiques issues de ce point et qui restent à distance finie forment précisément un tel ensemble.

Par la démonstration de l'existence des géodésiques de la quatrième catégorie, on achève de répondre à la question posée. Cette question est la seule (non intégrable élémentairement) où une solution analogue à celle de M. Poincaré ait pu être obtenue. Il y a lieu d'espérer que ces deux résultats ouvriront la voie à la résolution de la question dans d'autres circonstances de plus en plus générales.

D'autre part, deux conclusions ressortent de la discussion obtenue.

En premier lieu, l'étude des géodésiques de surfaces très simples, c'est-à-dire une question d'un énoncé tout élémentaire, introduit les ensembles

(1) Ces dernières dépendent de certaines géodésiques fermées spéciales, dites *lignes de gorge* (*voir* Chap. II).

parfaits et non continus. Il faudra donc compter avec des singularités de cette espèce dans la discussion des équations différentielles [1].

Il faudra surtout admettre que l'allure des trajectoires peut dépendre de propriétés discontinues, *arithmétiques,* des constantes d'intégration.

En second lieu, et comme conséquence, des problèmes importants de Mécanique, tels que celui de la stabilité du système solaire, rentrent peut-être dans la catégorie des questions mal posées. Si, en effet, on substitue à la recherche de la stabilité du système solaire la question analogue relative aux géodésiques des surfaces dont nous avons parlé, on constate que *toute* trajectoire stable peut être transformée, par un changement *infiniment petit* dans les données initiales, en une trajectoire complètement instable, se perdant à l'infini ou, plus généralement, en une trajectoire présentant n'importe laquelle des formes énumérées dans la discussion générale : par exemple, en une trajectoire asymptotique à n'importe quelle géodésique fermée. Or, dans les problèmes astronomiques, les données initiales ne sont jamais connues que *physiquement,* c'est-à-dire avec aucune erreur que le perfectionnement des moyens d'observation peut diminuer, mais ne saurait annuler. Si petite qu'elle soit, cette erreur pourrait amener une perturbation totale et absolue dans le résultat cherché.

Il y avait lieu, bien entendu, de chercher à étendre la méthode à des espaces à plus de deux dimensions. Pour cela il suffit, ainsi que je l'ai fait voir dans un article inséré aux *Procès-Verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles* de Bordeaux (3 février 1898) de considérer la courbure de Riemann et de Christoffel sous un point de vue nouveau, en l'obtenant comme un maximum.

Dans l'espace ordinaire, en effet, la courbure d'une surface réglée est, en général, négative et a pour maximum zéro. Les choses se passent d'une façon tout analogue dans une multiplicité quelconque. Supposons qu'on assemble les géodésiques de manière à en former des surfaces à deux dimensions, et, parmi ces surfaces, considérons toutes celles qui passent en un point donné et ont, en ce point, un plan tangent donné. Leurs courbures seront, en général, différentes entre elles; *mais elles auront un cer-*

---

[1] On sait que la question relative à la possibilité d'une pareille intervention s'est posée à M. Poincaré pour le cas des équations du premier ordre sur une surface de genre 1; mais, dans ce cas, la question n'a pu être tranchée jusqu'à ce jour.

tum maximum, lequel n'est autre que la courbure de Riemann et Christoffel relative à la direction de plan considérée.

Si cette courbure est essentiellement négative, les principes généraux qui ont été appliqués aux surfaces à courbure négative subsisteront. Je me réserve de développer, dans ces nouvelles conditions, les conséquences de ces principes; mais le loisir m'a manqué jusqu'ici pour le faire.

Équations aux dérivées partielles. Physique mathématique. — C'est dans le même ordre d'idées que j'ai été conduit à m'occuper des équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique. Ces équations et particulièrement le cas de l'Hydrodynamique, ont fait, depuis deux ans, l'objet du cours, actuellement en rédaction, que j'ai professé au Collège de France; en outre, un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* (33), résume quelques-unes des principales conclusions auxquelles je suis parvenu.

J'ai tout d'abord cherché à perfectionner la théorie que donne Hugoniot de la propagation des ondes. On sait que ce savant, devancé en partie par M. Christoffel, s'est occupé de définir et d'étudier la propagation d'un mouvement dans un autre, et cela non seulement pour les mouvements infiniment petits, mais pour les mouvements d'amplitude quelconque.

Il a, le premier, introduit explicitement la notion de *compatibilité* de deux mouvements, et en a même donné une définition précise pour le cas du mouvement rectiligne, Dans le cas du mouvement à trois dimensions, au contraire, cette notion est beaucoup moins complètement dégagée; aussi l'auteur se place-t-il dès l'abord dans l'hypothèse où il y a compatibilité, sans rechercher les conditions pour qu'il en soit ainsi.

Cette lacune dans les résultats d'Hugoniot était intimement liée à deux autres, plus générales, qu'il était nécessaire de combler toutes deux si l'on voulait arriver à une intelligence claire de ces phénomènes. La première était l'absence de l'interprétation géométrique; la seconde et la plus importante, l'absence de distinction entre les faits d'origine cinématique et les faits proprement dynamiques. L'expérience est d'accord avec la logique pour montrer combien cette division de la difficulté simplifie la solution de tous les problèmes que se pose la Mécanique; cette remarque générale se vérifie une fois de plus dans la question qui nous occupe en ce moment.

Il était d'autant plus nécessaire d'élucider ces différents points que les ondes, telles que les considère Hugoniot, s'introduisent d'une façon générale et nécessaire dans la mise en équation des problèmes relatifs à la

Mécanique des milieux déformables. Il est impossible, sans leur intervention, de concilier les équations internes du mouvement avec les conditions aux limites.

La discussion de la méthode d'Hugoniot, faite au point de vue que je viens d'indiquer, me conduit à des résultats très simples et très nets.

Soit un milieu mobile, que divise en deux régions 1 et 2, à l'instant t_0, une surface S. Supposons, pour fixer les idées, que la discontinuité soit du *second ordre*, c'est-à-dire que, les vitesses et les autres dérivées du premier ordre (savoir, les dérivées des coordonnées actuelles par rapport aux coordonnées initiales) étant partout continues, les accélérations et les autres dérivées du second ordre (tout en restant continues dans 1 et dans 2) subissent une variation brusque lorsqu'on traverse S. Les variations des différentes dérivées ne pourront être tout à fait quelconques : il est aisé de voir que, pour les connaître toutes, il suffit de se donner, en chaque point de S, trois vecteurs (pour le second ordre).

Les relations ainsi obtenues ne constituent point, il faut le remarquer, une condition imposée à la discontinuité : elles découlent de l'existence même de cette discontinuité.

Il semble, par contre, qu'il n'y ait point d'autres conséquences à tirer des données de la question.

Il n'en est rien : si de nouvelles relations ne sont pas vérifiées, si les trois vecteurs dont nous venons de parler ont des composantes prises arbitrairement, l'état ainsi donné à l'instant t_0 sera remplacé, aux instants voisins, par des états assez profondément différents du premier. On ne pourra, en effet (et cela au point de vue purement cinématique), concevoir aucun mouvement dans lequel le milieu reste divisé en deux régions seulement, le système des dérivées des deux premiers ordres restant continu dans chacune de ces régions.

Il faut tout au moins (c'est l'hypothèse la plus simple et celle que l'on a le plus usuellement à envisager) supposer que, avant et après t_0, la surface de discontinuité est dédoublée en deux feuillets, réunis seulement à l'instant t_0, et entre lesquels a lieu un troisième mouvement en discontinuité du second ordre avec chacun des deux premiers.

Pour que les deux mouvements donnés soient *cinématiquement compatibles*, c'est-à-dire pour que la surface de discontinuité puisse rester unique, il faut que les trois vecteurs précédemment introduits soient de même direction et en progression géométrique. La raison de cette progression donne la vitesse de propagation de la discontinuité.

Comme la compatibilité doit être regardée comme la règle et la non-compatibilité comme une exception résultant de la rencontre momentanée de deux discontinuités différentes, on voit qu'une discontinuité peut être définie par un vecteur unique (l'un de ceux dont nous avons parlé) et un nombre (la vitesse de propagation).

Parmi les conséquences que l'on peut tirer de ces principes, je signalerai les suivantes :

1° Puisqu'une discontinuité a une *direction* déterminée (celle du vecteur qui la représente), on peut parler de discontinuités *longitudinales* ou *transversales*. De plus, on aperçoit très clairement la relation qui existe entre les discontinuités et les ondes désignées par les mêmes dénominations en Acoustique et en Optique. Car on constate que les variations brusques des dérivées de la densité sont liées à la composante normale (à l'onde) de la discontinuité et celles du tourbillon à sa composante tangentielle ([1]).

2° Puisqu'on ne peut étudier les mouvements des fluides sans tenir compte des discontinuités, il y a lieu de se demander si celles-ci laissent subsister les théorèmes sur le potentiel des vitesses et la conservation des tourbillons. La réponse est affirmative, grâce au fait que les discontinuités hydrodynamiques sont normales.

L'exemple d'un problème bien voisin montre qu'une telle démonstration n'est nullement superflue : je veux parler du cas des fluides à *frottement intérieur*, qui me paraît extrêmement intéressant à plusieurs points de vue et sur lequel j'espère avoir l'occasion de revenir. On sait que, dans ce cas, le théorème classique de Lagrange sur le potentiel des vitesses cesse de s'appliquer.

Or, *cette circonstance est exclusivement due aux singularités du mouvement.* Il est bien aisé de reconnaître que, dans toute région où, pendant un certain intervalle de temps, ce mouvement reste analytique, le théorème de Lagrange reste valable pendant le même intervalle de temps.

([1]) Cette liaison est la suivante (pour le second ordre) :

Les variations brusques des dérivées (par rapport à x, y, z) de la dilatation sont les projections, sur les trois axes, de la composante normale du vecteur représentatif de la discontinuité.

La variation brusque du tourbillon est un segment situé dans le plan tangent à l'onde, et qui s'obtient en faisant tourner d'un angle droit, dans ce plan, la composante tangentielle du vecteur représentatif de la discontinuité (multipliée par la vitesse de propagation).

3° La méthode s'applique sans difficulté au mouvement élastique *avec déformation finie* : elle montre qu'une discontinuité déterminée admet (comme dans le cas des déformations infiniment petites) trois directions de propagation, lesquelles sont rectangulaires entre elles dans le milieu déformé, mais que d'autres résultats (tels que l'existence de propagations exclusivement longitudinales ou transversales dans les corps isotropes) sont particuliers aux déformations infiniment petites.

La théorie d'Hugoniot est liée à la notion de caractéristique pour les équations à un nombre quelconque de variables ; j'ai repris les recherches de Beudon à cet égard et les ai étendues au cas des systèmes à plusieurs fonctions inconnues. Cette extension était nécessaire, non seulement en raison de ce fait bien connu que l'élimination entre équations aux dérivées partielles ne peut se faire comme entre équations différentielles, mais encore parce que ce fait entraîne effectivement quelques différences entre les résultats obtenus, suivant qu'il s'agit d'une équation unique ou d'un système. C'est, en particulier, ce qui arrive pour l'étude des lignes introduites par Beudon et qu'on peut appeler *bicaractéristiques*, lignes qui s'introduisent nécessairement dans presque toutes les questions relatives aux caractéristiques et qui, d'autre part, ont une importante interprétation physique. J'ai constaté, en effet, que, si les caractéristiques représentent les ondes, les bicaractéristiques représentent les *rayons* sonores ou lumineux. Une propriété analytique simple explique, dans une certaine mesure, ce rôle physique dévolu aux bicaractéristiques.

La nécessité d'étudier d'une manière indépendante le cas des systèmes apparaît encore à propos de l'énoncé de Beudon, généralisation d'une proposition de M. Goursat, et d'après lequel une solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (à un nombre quelconque de variables) est déterminée (les conditions initiales étant analytiques) par ses valeurs sur deux multiplicités caractéristiques sécantes entre elles.

Cet énoncé a une interprétation physique facile à indiquer : il fait connaître, *lorsqu'il y a potentiel des vitesses* (de manière que le problème ne dépende que d'une seule inconnue), le mouvement intermédiaire qui prend naissance entre deux mouvements contigus et non compatibles entre eux. Si l'on se débarrasse (comme j'ai pu aisément arriver à le faire) de la condition que les multiplicités considérées soient *toutes deux* caractéristiques, on obtient également la détermination du mouvement produit,

dans un gaz animé d'un mouvement analytique donné, au contact d'une paroi animée d'un mouvement analytique également donné.

On trouve sans difficulté un énoncé analogue dans le cas des systèmes. Cet énoncé donne encore la solution, dans le cas général, du second des problèmes physiques que nous venons d'indiquer (mouvement d'un gaz au contact d'une paroi). Mais il n'en est pas de même pour la recherche du mouvement qui prend naissance entre deux mouvements incompatibles entre eux : lorsqu'il n'y a pas potentiel des vitesses (et que, par conséquent, il faut tenir compte des trois inconnues de la question), ce problème *n'est pas possible, en général :* il faut, pour qu'il le soit, l'existence d'une infinité de conditions infinitésimales d'ordre supérieur (lesquelles sont vérifiées d'elles-mêmes, dans le cas du potentiel des vitesses).

D'autre part, mon attention s'est portée sur une circonstance remarquable qui se rencontre dans l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre : je veux parler du principe de Huygens (au sens de Kirchhoff et de M. Poincaré). J'ai consacré, en 1900, un Mémoire à ce principe et à la notion équivalente de l'*intégrale résiduelle.*

J'appelle ainsi l'intégrale représentant le mouvement qui prend naissance *après* le passage d'une onde. Dans le cas des ondes sphériques, après le passage de l'onde, tout rentre dans le repos et, par conséquent, l'intégrale résiduelle est identiquement nulle. Dans un autre cas simple, cette intégrale résiduelle est une constante.

Dès lors, j'ai été conduit à rechercher, en prenant le cas le plus aisé, celui de deux variables indépendantes, les équations pour lesquelles l'intégrale résiduelle satisfait à d'autres équations linéaires que la proposée. La réponse (dans le cas de deux variables) est bien simple : *elle est fournie par les équations intégrables par la méthode de Laplace.*

La question de l'intégrale résiduelle en soulevait une autre d'une nature plus générale. Si, en effet, le mouvement résiduel est identiquement nul après le passage d'une onde sphérique due à un ébranlement initial d'un milieu indéfini exclusivement fluide, il est d'autres problèmes, presque identiques en apparence, dans lesquels le principe de Huygens se trouve en défaut : ce sont ceux où le milieu est limité par des parois solides dont le mouvement est donné. Cette contradiction apparente est liée à un fait qui me paraît essentiel, à savoir que, dans le cas d'un milieu limité, ce n'est plus le problème de Cauchy (détermination de la fonction par ses valeurs et celles d'une de ses dérivées sur la frontière du domaine donné)

qui se pose, mais un problème différent, se rapprochant de ceux que l'on a à résoudre pour les équations à caractéristiques imaginaires. Dans ce nouveau problème, les conditions aux limites ne font plus connaître, en effet, la fonction *et* sa dérivée normale sur toute la frontière, mais bien : 1° la fonction *et* sa dérivée normale sur une partie de cette frontière; 2° la dérivée normale *seule* sur l'autre partie.

Le cas de deux variables indépendantes conduit également à des problèmes *mixtes* de ce genre, ainsi qu'on s'en aperçoit par le développement naturel de certaines remarques de M. Picard. Dans ce cas, il est aisé de constater, ainsi qu'il y avait lieu de le supposer *a priori*, que le problème mixte présente un caractère qui le rapproche du problème de Dirichlet et l'éloigne du problème de Cauchy; c'est que la solution dépend essentiellement de la *forme* du domaine envisagé. Cette circonstance doit faire considérer notre problème mixte comme beaucoup plus difficile que le problème de Cauchy.

Le rapprochement ainsi établi entre les équations à caractéristiques réelles et les équations à caractéristiques imaginaires en entraîne plusieurs autres. Je n'en citerai qu'un, en renvoyant, pour les détails, à ce que je dis plus loin (Chap. II). On sait que, dans le cas des caractéristiques imaginaires, le problème de Cauchy, toujours possible (et d'une seule manière) lorsque les données sont analytiques, cesse de l'être dans le cas général. Au contraire, pour les équations à caractéristiques réelles, on est tenté de considérer le problème de Cauchy comme toujours possible et déterminé. J'ai appelé l'attention (32) sur ce que l'opposition ainsi créée entre les deux classes d'équations a de beaucoup trop absolu. En réalité, dans le second cas, les conclusions dépendent de l'orientation de la multiplicité initiale : pour un choix convenable de celle-ci, elles sont semblables à celles qui correspondent au cas des caractéristiques imaginaires.

On voit ainsi s'étendre le nombre des problèmes où les résultats obtenus en partant de données analytiques ne peuvent être généralisés sans erreur. L'étude des fluides à frottement offre encore, comme nous l'avons vu plus haut (p. 17), un exemple d'une généralisation de cette espèce conduisant à une conclusion complètement fausse.

En ce qui regarde l'intégrale résiduelle, la comparaison du problème de Cauchy et du problème mixte conduit à des résultats singuliers et tendant à nous montrer la question de l'intégrale résiduelle comme assez délicate.

Dans le cas de deux variables, en effet, l'intégrale résiduelle du problème mixte est beaucoup *plus* particulière que celle du problème de Cauchy : la première, par exemple, peut être identiquement nulle (pour certaines équations de Laplace), tandis que la seconde ne l'est jamais. Au contraire, dans le cas des ondes sphériques (quatre variables indépendantes), l'intégrale résiduelle du problème mixte est beaucoup *moins* particulière que celle du problème de Cauchy, puisque celle-ci est identiquement nulle, tandis que la première ne l'est pas et est même, en général, de forme très compliquée.

Les considérations que j'ai développées dans ce qui précède me permettront d'être bref sur les points dont je viens de parler et d'insister seulement sur les travaux dont il n'a pas été question jusqu'ici (¹) et sur les remarques que j'ai dû passer sous silence.

(¹) J'attire, en particulier, l'attention du lecteur sur les nos 35, 56, 57, Chap. III.

CHAPITRE PREMIER.

Série de Taylor. — **1**. Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1888).

2. Sur la recherche des discontinuités polaires (*Ibid.*, 8 avril 1889).

3. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII; 1892).

4. Théorème sur les séries entières (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 mars 1897).

5. Sur les séries entières (*Procès-Verbaux de la Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 3 juin 1897).

6. Théorème sur les séries entières (*Acta mathematica*, t. XXII; 1898).

7. La série de Taylor et son prolongement analytique (collection *Scientia*). Paris, Carré et Naud, 1901.

Fonctions entières et applications arithmétiques. — **8**. Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 mai 1892).

9. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand Prix des Sciences Mathématiques, 1892) (*Journal de Liouville*, 4e série, t. IX; 1893).

10. Sur les fonctions entières (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er juin 1896).

11. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (*Ibid.*, 22 juin 1896).

12. Sur la fonction $\zeta(s)$ (*Ibid.*, 13 juillet 1896).

13. Sur les fonctions entières (*Bulletin de la Soc. Math. de France*, Séance du 1er juillet 1896).

14. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques (*Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. XXIV; 1896).

15. Sur les séries de Dirichlet (*Procès-Verbaux de la Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 18 février 1897).

Série de Taylor.

Mes premières recherches sur la série de Taylor ont paru dans deux Notes (**1**, **2**) présentées à l'Académie des Sciences en 1888-1889, et dans ma Thèse (**3**).

La première question que j'ai eu à résoudre était la détermination du rayon de convergence d'une série entière, dans le cas le plus général. Il a été reconnu depuis que cette détermination avait été effectuée par Cauchy, à cela près que le grand géomètre n'a pu définir d'une manière rigoureuse ce qu'il appelle *la plus grande des limites*. D'autre part, la notion de *limite supérieure d'indétermination*, définie par Du Bois-Reymond, est précisément équivalente à la précédente. Mon œuvre personnelle, sur ce point, se réduit donc à avoir montré qu'il suffisait de réunir ces deux résultats pour arriver à la solution cherchée.

Cette première solution m'a servi de point de départ pour la recherche que j'avais en vue en premier lieu, celle des points singuliers situés sur le cercle de convergence. Il suffit, en effet, pour reconnaître la présence d'un tel point singulier, de développer la fonction donnée, non plus suivant les puissances de la variable primitive x, mais suivant celles de $x - \alpha$, α étant l'affixe d'un point situé sur le rayon qui va de l'origine au point considéré x_0. Si le nouveau développement admet pour rayon de convergence $|x_0 - \alpha|$, le point x_0 est singulier; sinon, x_0 est un point ordinaire. On sait donc, au moins théoriquement, reconnaître laquelle de ces deux hypothèses est la vraie, du moment qu'on sait trouver le rayon de convergence de la nouvelle série.

La complication des formules qui donnent les coefficients de cette nouvelle série en fonction des coefficients donnés est précisément l'une des difficultés fondamentales de la question qui nous occupe [1] : il était nécessaire de la diminuer dans la mesure du possible si l'on voulait tirer du principe qui vient d'être indiqué des conséquences un peu étendues. J'ai remarqué, à cet effet, qu'on peut toujours réduire l'expression des nouveaux coefficients à un nombre fini de termes (ce nombre étant proportionnel à l'indice du coefficient considéré). Les termes ainsi négligés n'ont aucune influence, leur ordre de grandeur total étant inférieur à celui qui est en question. Grâce à cette remarque, qui a joué un rôle fondamental dans la plupart des travaux ultérieurs, j'ai pu, dès cette époque, arriver à des résultats assez étendus. On trouvera dans l'Introduction (p. 5) les plus saillants d'entre eux, ceux qui sont relatifs aux séries qui ont le cercle de convergence pour coupure.

J'ajouterai seulement, à cet égard, que, pour toutes les séries de cette

[1] J'ai signalé ces difficultés et indiqué les conséquences qu'elles comportent au point de vue de la méthode à suivre, dans l'Ouvrage (7) dont je parle plus loin.

espèce qui avaient été formées avant moi (celle de M. Fredholm exceptée), j'ai constaté la possibilité d'établir la propriété demandée par un raisonnement très élémentaire et d'une telle simplicité qu'on peut s'étonner de ne pas l'avoir vu présenter dès l'abord ([1]); ce raisonnement est fondé sur cette circonstance, que les exposants des termes qui figurent dans ces séries ont des facteurs communs, de plus en plus nombreux à mesure qu'on s'éloigne dans la série.

Mais la facilité de cette déduction ne doit pas nous faire oublier la véritable cause du résultat : pour que le cercle de convergence d'une série de Maclaurin soit une coupure, il n'est nullement nécessaire que les exposants des termes non nuls aient des diviseurs communs : il suffit que ces exposants, au lieu de se suivre immédiatement, offrent des lacunes dont l'étendue augmente indéfiniment (avec une rapidité suffisante) ([2]).

Les propositions établies dans cette première partie de mon travail sont de nature tout à fait générale ([3]) : chacune d'elles est susceptible de mettre en évidence des singularités des espèces les plus diverses. Dans la suite, au contraire, je me place au point de vue opposé, en faisant *a priori* des hypothèses restrictives sur la nature des singularités cherchées. La méthode à employer, dans ces conditions, m'était fournie par le travail de M. Darboux intitulé : *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série*, et dans lequel sont précisément étudiées les relations entre les singularités d'une fonction et les coefficients de la série qui la représente. Seulement, le point de vue était inverse, M. Darboux ayant toujours considéré des fonctions dont les singularités étaient entièrement données à l'avance (afin d'en déduire la valeur asymptotique des coefficients), alors que je me plaçais dans l'hypothèse contraire.

Si, prenant tout d'abord le cas le plus simple, on veut exprimer qu'une

([1]) MM. Lerch et Méray avaient exposé des remarques analogues, mais moins simples et, par là, d'une application bien moins générale. [Par exemple, le raisonnement de M. Lerch, fondé sur une relation entre $f(x)$ et $f(x^2)$, est particulier au cas où les exposants forment une progression géométrique de raison 2 et à des cas voisins de celui-là.]

([2]) J'indique ici le résultat qui a été démontré dans ma Thèse; en réalité, ainsi qu'il ressort des théorèmes de M. Fabry, la restriction mise entre parenthèses doit être supprimée.

([3]) *Voir* sur ce point l'Introduction (p. 4).

série de Taylor n'admet sur son cercle de convergence qu'un seul pôle, les formules de M. Darboux donnent la réponse demandée. J'ai montré qu'on peut aller bien plus loin et déterminer les pôles de la fonction en quelque nombre qu'ils soient, et cela non seulement sur le cercle de convergence, mais aussi en dehors de ce cercle et aussi loin qu'on le veut dans le plan, de moins dans tout cercle C concentrique au premier et ne contenant pas de singularité non polaire. Dans ce but, les méthodes de M. Darboux ne suffisent plus : le rôle fondamental est alors joué par un certain déterminant dépendant de deux indices m et p, et dont on étudie l'ordre de grandeur lorsque m augmente indéfiniment, p restant fixe. L'emploi de ce déterminant permet de répondre à toutes les questions que l'on peut se poser relativement au nombre et à la position des pôles, ainsi qu'au prolongement analytique de la fonction dans le cercle C.

L'importance de ce résultat relatif aux pôles apparaîtra si l'on remarque qu'il équivaut à la résolution des équations algébriques ou transcendantes, dans un cas que l'on doit considérer pratiquement comme le plus général. La forme analytique de cette solution, qui est une généralisation de la *règle de Bernoulli*, doit également être notée. L'extension de la règle de Bernoulli au calcul de *toutes* les racines (et non plus seulement de la plus petite d'entre elles) peut, en effet, dans le cas des équations algébriques, s'obtenir autrement : M. Runge (*Acta mathematica*, t. VI) l'avait réalisée en considérant la racine cherchée comme limite de certaines fonctions symétriques des racines. Mais le procédé auquel je suis arrivé a sur celui de M. Runge l'avantage de s'appliquer de lui-même aux équations transcendantes; et surtout, au lieu que la méthode de M. Runge exigerait la transformation des fonctions symétriques des racines en fonctions rationnelles des coefficients, calcul qui est au nombre des plus complexes que l'on puisse avoir à effectuer, j'obtiens les quantités cherchées comme limites d'expressions formées *explicitement* au moyen des données. Ces expressions ne sauraient être, du moins quant à présent, utilisées au point de vue pratique. Mais il n'en est pas de même au point de vue théorique; et dans les applications que j'ai eu à en faire aux fonctions entières, ces formules se sont montrées d'un maniement très simple.

Une méthode analogue, mais un peu plus compliquée, permet de trouver des singularités situées, cette fois, nécessairement sur le cercle de convergence, mais non polaires et même de nature assez générale. La catégorie de singularités que l'on peut atteindre ainsi comprend, en fait, toutes

celles (le point essentiel excepté) que l'on rencontre usuellement en Analyse : c'est ce que démontre l'application, convenablement perfectionnée, de la méthode de M. Darboux.

Les recherches auxquelles j'ai dû me livrer sur l'application de cette méthode m'ont conduit aux deux résultats dont j'ai parlé dans l'Introduction. Le second d'entre eux, je veux dire la formation de suites de quantités par lesquelles on peut multiplier les coefficients de la série sans en changer les singularités, appartient à une catégorie de propositions qui semblent devoir être d'un usage général dans cette théorie. Il m'a permis, en particulier, de résoudre une des questions qui se posaient à la suite de la Note citée de M. Lecornu : Lorsque la fonction possède sur son cercle de convergence *un seul* point singulier, le rapport de deux coefficients consécutifs tend-il nécessairement vers une limite égale à l'affixe de ce point?

La réponse est négative : c'est ce que montre l'application de la remarque précédente à la série

$$\sum_m \sin(\log m)\, x^m.$$

Après que les questions posées dans ma Thèse eurent suscité les importantes recherches de MM. Borel et Fabry, je suis moi-même revenu à l'étude de la série de Taylor pour énoncer à son égard (4 à 6) le théorème qui donne les singularités de la série $\sum a_i b_i x^i$, connaissant celles des séries $\sum a_i x^i$, $\sum b_i x^i$.

Cette proposition est d'une nature tout analogue à celle que je viens de rappeler. Un résultat voisin, obtenu peu après par M. Hurwitz, contribue à montrer l'utilité du principe dont elles découlent toutes deux (et auquel peuvent également se rattacher la transformation employée par M. Poincaré, dans son Mémoire de 1883 sur les séries entières, et la méthode de sommation exponentielle de M. Borel).

J'ai consacré un Ouvrage (7), actuellement en cours de publication, à l'exposition de l'état actuel de cette question et des vues qu'elle paraît suggérer. J'ajoute d'ailleurs quelques remarques nouvelles; la plus importante concerne les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Les théorèmes classiques de Méray et de Weierstrass sur la convergence des séries entières entraînent une conséquence qui ne paraît pas avoir été notée jusqu'ici, relativement à la distribution, si mal connue encore, des singularités de ces fonctions.

Fonctions entières.

Du théorème relatif au rayon de convergence d'une série entière découle cette conséquence : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Maclaurin représente une fonction entière est que la racine $m^{ième}$ du coefficient de x^m tende vers* o.

Les propriétés les plus importantes de la fonction entière sont liées à la plus ou moins grande rapidité avec laquelle a lieu cette décroissance des coefficients. L'étude de ces propriétés consiste tout d'abord dans l'établissement de relations entre cette loi de décroissance et les deux éléments suivants :

1° L'ordre de grandeur du module maximum de la fonction pour les grandes valeurs du module de la variable;

2° La distribution des zéros et la valeur du genre, laquelle est étroitement liée à cette distribution.

Une partie de ces relations avait été établie dans le Mémoire cité de M. Poincaré : une limite supérieure des coefficients successifs avait pu être trouvée, connaissant l'une ou l'autre des deux lois qui viennent d'être énumérées. Mais on n'avait pas pu, depuis ce moment, obtenir les réciproques, c'est-à-dire déduire d'une limite supérieure supposée connue pour chaque coefficient les conséquences qui en découlent, d'une part quant à l'ordre de grandeur de la fonction elle-même, d'autre part quant à la distribution de ses zéros.

C'est à l'établissement de ces conséquences qu'est principalement consacré le Mémoire couronné par l'Académie en 1892 et publié en 1893 au *Journal de Mathématiques*. J'ai ensuite précisé les premières dans la Note (13) insérée au *Bulletin de la Société Mathématique de France* et dont j'ai également parlé dans l'Introduction.

Quant aux zéros, les résultats contenus dans ma Thèse fournissaient aisément à leur égard cette conclusion simple : *La loi de croissance des racines de la fonction entière* $\sum a_m x^m$ *est au moins aussi rapide que celle des quantités* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Pour étudier le facteur exponentiel, de nouvelles déductions ont, au contraire, été nécessaires. Ces déductions m'ont, en particulier, permis de démontrer, avec une extrême simplicité, le théorème de M. Picard sur les fonctions entières, pour toutes les fonctions de genre fini. La démonstra-

tion ainsi donnée s'étend d'elle-même, moyennant une restriction analogue, au théorème plus général du même auteur sur le point essentiel, ainsi que je l'ai montré depuis (10).

On sait que mon Mémoire de 1893 a été le point de départ des si importants travaux de M. Borel, consacrés à la démonstration du premier théorème de M. Picard sans restriction, et aussi de ceux de MM. Schou et Jensen. Outre les applications à la fonction $\zeta(s)$ et aux fonctions analogues, dont il me reste à parler, la proposition fondamentale de ce Mémoire a été utilisée par M. Poincaré dans une question relative aux déterminants infinis qui s'introduisent en Astronomie (*Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II).

Applications arithmétiques.

La détermination du genre de la fonction $\zeta(s)$ — et c'était d'ailleurs l'objet même de la question posée par l'Académie — était nécessaire pour l'éclaircissement des points principaux du Mémoire principal de Riemann *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée.* Cette détermination, qui avait été jusque-là cherchée en vain, s'effectue sans aucune difficulté à l'aide des principes précédemment établis sur les fonctions entières. Aussi M. von Mangoldt put-il peu après établir avec une entière rigueur les résultats énoncés par Riemann.

Un seul point restait à élucider : la question de savoir si, conformément à une assertion émise, en passant, par ce grand géomètre, les racines imaginaires de l'équation $\zeta(s) = 0$ sont toutes de la forme $\frac{1}{2} + ti$, t étant réel. Cette question n'a pas encore reçu de réponse décisive (le Mémoire dans lequel M. Jensen annonce qu'il donnera ce résultat n'ayant pas encore paru); mais j'ai pu en 1896 (11, 12, 14) établir que la partie réelle des racines dont il s'agit, laquelle n'est évidemment pas supérieure à l'unité, ne peut non plus, pour aucune d'elles, être *égale* à 1. Or ce résultat suffit pour établir les principales lois asymptotiques de la théorie des nombres premiers, de même que le résultat complet de Riemann conduirait à montrer [1] que ces lois sont vraies à une erreur près, laquelle n'est pas seulement d'ordre inférieur à celui de la quantité considérée x, mais est tout au plus comparable à $\sqrt{x}$.

---

[1] *Voir* un Mémoire récent de M. Helge von Koch.

De plus le mode de démonstration que j'emploie n'utilise que les propriétés les plus simples de la fonction $\zeta(s)$. Il en résulte que ce mode de démonstration s'étend sans grande difficulté aux séries analogues qui ont été utilisées dans la théorie des nombres. J'ai fait voir en particulier, dans le même travail, qu'il s'applique aux séries qui servent à étudier la distribution des nombres premiers représentables soit par une forme linéaire (séries de Dirichlet) ([1]), soit par une forme quadratique définie.

M. de la Vallée-Poussin parvenait en même temps au même résultat, mais par une voie moins rapide. Depuis, ce savant (tout en simplifiant son Analyse par l'emploi du mode de raisonnement que j'avais indiqué) a étendu ses recherches au cas des formes quadratiques indéfinies et aussi à celui où l'on donne à la fois une forme linéaire et une forme quadratique; de sorte que les mêmes principes relatifs aux fonctions entières servent de base à la solution générale de toutes les questions qui s'étaient posées relativement à la distribution des nombres premiers.

Ce ne sont d'ailleurs pas les seules questions de Théorie des nombres pour la solution desquelles les théorèmes qui viennent d'être rappelés se soient montrés d'une importance essentielle. Je me contente de signaler, à cet égard, les Mémoires récents de MM. von Mangoldt, Landau, etc.

([1]) Pour démontrer le théorème relatif à la distribution des nombres premiers dans une progression arithmétique, j'ai utilisé, en la complétant sur un point, la proposition de M. Lipschitz qui établit, pour les séries de Dirichlet, une relation fonctionnelle analogue à celle de Riemann-Schlömilch. J'ai été conduit, depuis (15) à simplifier la démonstration de ce théorème.

CHAPITRE II.

Lignes géodésiques et trajectoires réelles de la Dynamique. — 16. Une propriété des mouvements sur une surface (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXII, p. 983; 9 mai 1896).

17. Une propriété des mouvements sur une surface (*Procès-Verbaux Soc. Sc. Phys. et Nat. Bordeaux*, 30 avril 1896).

18. Sur l'instabilité de l'équilibre (*Ibid.*, 21 mai 1896).

19. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées (*Ibid.*, 4 mars 1897).

20. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 juin 1897).

21. Sur les lignes géodésiques (*Procès-Verbaux Soc. Sc. Phys. et Nat. Bordeaux*, 17 juin 1897).

22. Sur les lignes géodésiques (*Procès-Verbaux Soc. Sc. Phys. et Nat. Bordeaux*, 1[er] juillet 1897).

23. Sur une surface à courbures opposées (*Ibid.*, 22 juillet 1897).

24. Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Bordin, 1896) (*Journal de Mathématiques*, 5[e] série, t. III; 1897).

25. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques (*Ibid.*, 5[e] série, t. IV; 1898).

26. Sur la courbure dans les espaces à plus de deux dimensions (*Procès-Verbaux Soc. Sc. Phys. et Nat. Bordeaux*, 3 février 1898).

27. Sur le billard non euclidien (*Ibid.*, 5 mai 1898).

28. Sur la forme des géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVI; 1898).

29. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales (*Ibid.*, 17 janvier 1900).

Équations aux dérivées partielles et Physique mathématique. — 30. Les Invariants intégraux et l'Optique (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 14 mars 1898).

31. Sur l'intégrale résiduelle (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, p. 69 à 90; 1900).

32. Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles (*Congrès international des Mathématiciens*, Paris; 1900).

33. Sur la propagation des ondes (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX; 1901).

Équations différentielles réelles et trajectoires de la Dynamique.

On peut considérer comme pratiquement épuisée la liste des systèmes d'équations différentielles qui peuvent s'intégrer, au sens élémentaire du mot, c'est-à-dire par une combinaison finie des symboles actuellement en usage en Analyse.

Il faut donc se résigner à obtenir isolément, par l'étude directe du problème, les renseignements que l'intégration complète aurait fournis d'un seul coup. Les recherches, à cet égard, peuvent être poursuivies dans trois directions différentes :

1° L'étude analytique de la solution, en supposant que les fonctions cherchées soient analytiques;

2° L'intégration *quantitative*, au sens de M. Painlevé, c'est-à-dire la formation de séries permettant de calculer numériquement les fonctions cherchées, dans tout le domaine où elles existent;

3° L'étude *qualitative* des courbes cherchées, c'est-à-dire la discussion générale des formes qu'elles présentent. Le problème de la *stabilité du système solaire* est, par exemple, un problème qualitatif.

Ce dernier point de vue, qui, indépendamment de son importance propre, intervient forcément dans les recherches relatives aux deux précédents ([1]), est celui sous lequel nos connaissances sur les équations différentielles sont les moins avancées. Les méthodes classiques permettent de suivre une trajectoire dans une région suffisamment restreinte entourant son point d'origine et nous renseignent, dans les mêmes conditions, sur la régularité de cette trajectoire et sur la manière dont elle dépend des données initiales ([2]); elles ne nous disent pas ce que la courbe en question devient dans l'ensemble de son parcours, lorsque la variable indépendante prend la série complète de ses valeurs jusqu'à $+\infty$.

Cette insuffisance est dans la nature des choses, comme le montre l'inspection même des résultats trouvés par d'autres méthodes, lorsqu'on a pu

([1]) Il est clair, par exemple, que le choix d'une expression propre à représenter la solution cherchée sera nécessairement guidé par la considération de l'allure de cette solution; c'est, on le sait, ce que montre avec évidence l'histoire récente de la Mécanique céleste.

([2]) On sait que ce point a été élucidé, dans le cas du domaine réel, par MM. Bendixson et Picard. J'ai ensuite (29) donné du même théorème une démonstration qui offre l'avantage d'une extrême simplicité.

en obtenir. C'est ce qui, en 1896, n'avait pu être fait complètement que dans un seul cas (en dehors des équations intégrables élémentairement ou linéaires), celui des équations du premier ordre et du premier degré traité par M. Poincaré en 1881. On avait vu alors s'introduire d'une manière nécessaire, un élément complètement négligé jusqu'alors dans la question : la *connexion* de la variété sur laquelle l'équation différentielle est considérée.

Il peut sembler étonnant que l'on se soit si longtemps proposé l'étude de courbes tracées dans un domaine sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine. C'est, en effet, ce qu'on ne saurait expliquer autrement que par la tendance, acquise peu à peu par les géomètres, à se contenter de l'étude *locale* des courbes qu'ils cherchaient : tendance qui, par un cercle vicieux fréquent dans l'histoire de la Science, venait à son tour de la nature même des méthodes qu'ils avaient à leur disposition.

C'est uniquement aux propriétés qualitatives que j'ai consacré mes recherches sur les équations différentielles réelles. Une première indication m'a été fournie par l'examen des problèmes qui s'intègrent élémentairement. Prenons l'un des plus simples : le mouvement d'un point pesant sur une sphère. La discussion montre que le mobile doit nécessairement, sous réserve de certains mouvements exceptionnels dont je parlerai un peu plus loin, passer une infinité de fois dans l'hémisphère inférieur.

C'est ce résultat dont j'ai tout d'abord obtenu l'équivalent exact pour le mouvement d'un point sur une surface quelconque, sous l'action de forces quelconques données. A la moitié inférieure de la sphère correspond alors une région que je nomme *attractive* et qui est caractérisée par une propriété géométrique simple : elle est formée par les points où la ligne de niveau tourne sa concavité géodésique dans le sens de la force. Toute trajectoire (sous la même réserve que tout à l'heure) doit passer une infinité de fois dans la région attractive ([1]).

([1]) La célèbre question des *lignes de faîte* et des *thalwegs* relève peut-être de cet ordre de considérations. Tout au moins on aperçoit bien ainsi la distinction à établir entre la ligne de faîte et le thalweg : la première appartenant à la région répulsive, le second à la région attractive. Cette remarque semble montrer l'avantage qu'il y aurait à faire entrer cette question, non dans le domaine de la Géométrie, mais dans celui de la Mécanique. On peut, par exemple, se demander si le lieu des sommets des courbes de niveau (lequel passe d'ailleurs par les cols, mais n'est pas une ligne de plus grande pente) ne répondrait pas à l'idée que nous nous faisons des lignes de faîte et des

On obtient des conclusions de même nature pour les problèmes de Dynamique qui dépendent de plus de deux paramètres; mais, dans ce cas, les résultats sont en général moins complets. Il est cependant des problèmes où ils suffisent pour donner une idée de l'allure des trajectoires. Considérons, par exemple, un point matériel mobile dans l'espace ordinaire, sous l'action de forces dépendant d'un potentiel.

Supposons que les surfaces de niveau soient partout convexes, et cela dans le sens de la force. Alors toutes les trajectoires, sauf dans les cas exceptionnels, s'éloigneront indéfiniment. De telles forces pourront être appelées *répulsives*, quoiqu'elles comprennent les répulsions émanées de points fixes comme cas infiniment particuliers.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, la propriété fondamentale de la région attractive est en défaut pour certaines trajectoires (par exemple, dans l'exemple considéré en premier lieu, celles qui tendent vers le point le plus élevé). Mais on est renseigné d'une manière précise sur ces mouvements exceptionnels. Grâce à un lemme très simple qui s'énonce ainsi : *Si, lorsqu'une variable t augmente indéfiniment par valeurs positives, une fonction de t tend vers une limite pendant que sa dérivée seconde reste finie, la dérivée première tend vers zéro*, on constate qu'en général le mobile tend alors asymptotiquement vers une position d'équilibre instable.

L'étude de ces positions d'équilibre est, comme on le voit, étroitement liée aux théorèmes précédents. De ceux-ci découle en particulier la réciproque du théorème fondamental de Dirichlet, c'est-à-dire la démonstration de l'instabilité de l'équilibre dans le cas où la fonction des forces n'est pas maxima [1]. Je n'insisterai pas, toutefois, sur cette démonstration, car elle avait été obtenue antérieurement. M. Kneser avait répondu à la question en 1895, pour le cas où cette fonction est minima, cas dans lequel les considérations que je viens de rappeler rendent le théorème intuitif (puisque la position d'équilibre correspondante est située dans la région répulsive); son raisonnement n'est d'ailleurs autre que celui qu'on dédui-

---

thalwegs, ces sommets étant de deux espèces différentes, suivant le sens de la concavité en ces points. Mais l'utilité d'une pareille définition ne serait démontrée que le jour où l'on aurait établi, pour le lieu en question, une relation particulière avec les trajectoires d'un point pesant sur la surface.

[1] Tout au moins si l'on se place dans l'hypothèse générale, celle où l'ensemble des termes du second degré, dans le développement de cette fonction autour du point considéré, peut prendre des valeurs négatives.

rait de ces considérations, en les appliquant à ce problème particulier [1]. Le cas géuéral lui-même avait été traité par M. Liapounoff dès 1892. Seulement, le Travail de M. Liapounoff n'avait été publié qu'en langue russe et ne fut connu en France qu'au moment où son Auteur en adressa un résumé au *Journal de Mathématiques*, c'est-à-dire quelque temps après la date où j'avais obtenu et présenté à l'Académie une démonstration, d'ailleurs un peu différente, de la proposition dont il s'agit.

La discussion à laquelle je m'étais précédemment livré m'a permis d'apporter à cette démonstration un complément utile. Parmi les trajectoires qui passent au voisinage d'une position d'équilibre instable, il en est, en effet, sur lesquelles le caractère d'instabilité n'apparaît pas, c'est-à-dire qui restent indéfiniment comprises dans une petite région entourant cette position. Quelles seront les formes de ces trajectoires? J'ai constaté qu'elles peuvent se diviser en deux catégories, les unes, T', satisfaisant, dans tout leur parcours à certaines conditions d'inégalité particulières, les autres, T'', asymptotiques à des trajectoires T'. Ainsi, si la fonction de force a, dans le voisinage de l'origine, la forme

$$U(x,y) = ax^2 - by^2 + \ldots \qquad (a > 0, b > 0),$$

les trajectoires T' coïncident sensiblement avec des segments de l'axe des x, l'écart étant d'autant plus petit que ces trajectoires sont assujetties à rester plus près de l'origine. On sait les résultats que l'étude de ces trajectoires a fournis peu après à M. Painlevé.

Tout important qu'il fût, le problème précédent m'entraînait en dehors de l'objet principal de mes recherches, à savoir du mouvement considéré dans tout l'ensemble du domaine donné. Je reviens à cet objet en m'occupant des géodésiques des surfaces à courbure positive. Toutefois je n'insisterai pas sur ce point, ayant indiqué dans l'Introduction la proposition la plus importante à laquelle je suis arrivé.

Pour achever ce qui concerne les matières contenues dans mon premier Mémoire sur cette question, je dirai un mot de la théorie des invariants intégraux, que j'ai été amené à compléter sur un point de détail.

On sait que cette théorie permet de démontrer que, si l'on écarte cer-

(1) M. Kneser a également été conduit à introduire le lemme cité plus haut sur les dérivées d'une fonction qui tend vers une limite. Mais l'apparition du Mémoire (*Journal de Crelle*, t. CXVIII, 1897) où il énonce ce lemme est postérieure à la présentation de mon propre Travail à l'Académie.

taines trajectoires exceptionnelles, toutes les autres jouissent de la stabilité à la Poisson, c'est-à-dire repassent un nombre indéfini de fois dans le voisinage indéfiniment rapproché d'un quelconque de leurs points. Toutefois, la conclusion qui résulte du raisonnement de M. Poincaré n'est pas absolument identique à celle que je viens d'énoncer. Il ressort seulement de ce raisonnement que, ε étant un nombre donné quelconque, les trajectoires qui ne passent pas un nombre indéfini de fois à une distance moindre que ε de leur point d'origine sont exceptionnelles. Cette conclusion ne serait pas, à la rigueur, incompatible avec celle-ci que, parmi les trajectoires restantes, aucune ne possédât la stabilité à la Poisson. J'ai pu aisément remanier le raisonnement à ce point de vue; j'ai même été un peu plus loin en cherchant la rapidité avec laquelle une trajectoire quelconque (non exceptionnelle) se rapproche de sa position primitive : j'ai montré que la distance minima entre un arc déterminé de trajectoire et un des arcs qui le suivent pendant un temps T, décroît au moins comme $\frac{1}{\sqrt{T}}$ (si la trajectoire n'est pas exceptionnelle) (¹).

J'arrive au cas des surfaces à courbure négative. Ici, les mêmes principes, joints aux considérations d'*Analysis situs* auxquelles il est fait allusion dans l'Introduction, conduisent, d'une manière entièrement intuitive, à une discussion complète des courbes cherchées (²).

Celles-ci se répartissent en quatre catégories :

1° Géodésiques fermées;

2° Géodésiques asymptotiques aux géodésiques fermées (³);

3° Géodésiques qui s'en vont à l'infini;

4° Géodésiques qui s'approchent d'une géodésique fermée déterminée en s'enroulant autour d'elle (comme le ferait une asymptotique), mais qui abandonnent ensuite cette ligne pour se rapprocher (plus étroitement et

(¹) Je me place, pour fixer les idées, dans le cas où le nombre des degrés de liberté est égal à 2.

(²) La discussion obtenue est même plus satisfaisante à certains égards que dans le seul autre cas où l'on ait pu en établir une, celui des équations du premier ordre et du premier degré. Pour ces dernières, en effet, le nombre des cycles limites est en général inconnu, au lieu que les géodésiques fermées de nos surfaces, tout en étant en nombre infini, peuvent être *comptées* exactement, en ce sens qu'on peut les faire correspondre d'une manière univoque à une suite déterminée de symboles numériques.

(³) Un examen plus approfondi de la question conduit à réunir en une seule classe une géodésique fermée et ses différentes asymptotiques.

pendant un temps plus long) d'une autre géodésique fermée; et ainsi de suite indéfiniment.

Je n'insiste pas, l'ayant déjà fait dans l'Introduction, sur le mode de démonstration par lequel s'établit l'existence des lignes de cette dernière catégorie, et qui m'a conduit à reconnaître, dans les géodésiques qui restent à distance finie, la disposition assez étrange désignée (d'après la terminologie générale de M. Cantor) sous le nom d'*ensemble parfait non continu*. Les résultats précédents appellent d'ailleurs plusieurs autres remarques relativement auxquelles je renvoie également à l'Introduction.

Dans un travail ultérieur (28), les résultats précédents sont complétés par une étude plus approfondie des géodésiques qui s'en vont à l'infini. J'avais déjà démontré que ces lignes s'éloignent *régulièrement*, c'est-à-dire sans alternative de retour à distance finie; d'une manière plus précise, chaque nappe infinie d'une surface à courbures opposées peut être, sauf dans un cas singulier, celui des nappes *non évasées* [1], considérée comme limitée par une certaine ligne fermée dite *ligne de gorge* (parce qu'elle se réduit à l'ellipse de gorge dans le cas de l'hyperboloïde réglé) et possédant la propriété suivante : une géodésique qui traverse la ligne de gorge pour pénétrer dans la nappe infinie ne peut plus traverser cette ligne en sens inverse; elle s'éloigne indéfiniment sur la nappe infinie, de manière que sa distance à la ligne de gorge aille constamment en croissant.

J'ai cherché à étudier de plus près ce que deviennent les géodésiques qui s'éloignent ainsi à l'infini. Soient L une telle géodésique, M un quelconque de ses points; du point M abaissons sur la ligne de gorge une géodésique normale. Lorsque M s'éloignera indéfiniment sur la trajectoire L, cette géodésique normale tendra vers une position limite déterminée.

La géodésique L, lieu du point M, pourra d'ailleurs tourner une ou plusieurs fois autour de la nappe infinie; si la courbure totale de celle-ci (autrement dit l'aire de sa représentation sphérique) est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, il existe des géodésiques qui ne font point le tour de la nappe. Dans le cas contraire, il y a un minimum au-dessous duquel le nombre des tours ne peut s'abaisser.

Dans le même travail, je me suis occupé de vérifier, sur le cas élémentaire des quadriques réglées, quelques-uns des théorèmes généraux que j'avais démontrés sur la disposition des géodésiques. Cette vérification

---

(1) *Voir* ci-après, p. 39.

n'est pas immédiate; elle ne se fait que moyennant certaines relations d'inégalité entre intégrales définies hyperelliptiques. Il est remarquable que ces relations, qui intéressent exclusivement le domaine réel, s'obtiennent par l'application du théorème de Cauchy sur les intégrales de fonctions de variables imaginaires, application analogue à celle qui m'avait déjà servi antérieurement (59) dans la discussion d'une autre question de Mécanique.

Ces mêmes travaux sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées ont exigé des recherches d'une nature un peu différente et dont il me reste à parler. Ainsi que je l'ai dit plus haut (*voir* l'Introduction, p. 12), les propriétés des géodésiques dépendent essentiellement de l'ordre de connexion de la surface. Il était donc indispensable d'être renseigné tout d'abord sur la forme des surfaces à courbures opposées.

Dans mon premier Mémoire, j'avais déjà été conduit incidemment à traiter une question de cette espèce, relativement aux surfaces à courbure positive. J'avais complété le théorème connu de Bonnet sur ces surfaces par la proposition suivante : *Une surface à courbure partout positive est toujours simplement connexe; elle correspond d'une manière univoque à sa représentation sphérique.*

Si, au contraire, on passe au cas des surfaces à courbure partout négative, on constate que de telles surfaces (supposées régulières) ont nécessairement des nappes infinies [1]. Un principe très simple conduit à cette conclusion; il s'énonce ainsi :

Une surface régulière à courbures opposées qui a un point commun avec un

---

[1] Bien entendu, cette conclusion ne concerne que les surfaces et ne s'applique pas aux *variétés* à deux dimensions, lesquelles peuvent fort bien être complètement limitées, tout en étant à courbure partout négative.

Dans le Cours professé au Collège de France en 1897-1898, j'ai insisté sur l'importance que possèdent en Mécanique ces variétés non applicables sur des surfaces. L'exemple suivant mérite peut-être d'être rappelé à cause de sa simplicité : un corps homogène de révolution peut tourner autour de son axe, lequel peut lui-même tourner autour d'un axe vertical fixe auquel il est invariablement lié. La force vive d'un pareil système a évidemment la même expression que l'élément linéaire d'un plan. Cependant, la variété correspondante (celle dont les géodésiques fournissent le mouvement de ce système), étant limitée en tout sens, n'est manifestement applicable ni sur le plan ni sur aucune surface développable; elle n'est représentable que par le *parallélogramme replié* de Klein-Clifford (Klein, *Conférences de Chicago*, p. 90-92 de la traduction Laugel).

plan ne peut être tout entière d'un même côté de ce plan (par conséquent encore, *un plan ne peut couper une portion finie de surface à courbures opposées sans séparer en deux parties le contour qui la limite*).

Cette proposition impose à la forme des surfaces à courbures opposées des conditions assez précises; elle semble capable de rendre des services dans plusieurs questions analogues : c'est ainsi qu'elle a joué depuis un rôle important dans les curieuses recherches par lesquelles MM. Minkowski et Liebmann ont démontré l'impossibilité de déformer la sphère et celle de déformer infinitésimalement les surfaces convexes.

La même proposition trouve encore son application dans l'étude d'une forme particulière que peuvent présenter les nappes infinies des surfaces à courbures opposées.

Dans le cas que l'on doit considérer comme général, une ligne fermée λ tracée autour de la nappe a nécessairement une longueur indéfiniment croissante à mesure qu'elle s'éloigne. Mais le contraire peut se présenter; la nappe infinie est alors dite *non évasée*. La proposition précédemment énoncée montre qu'une telle nappe a en général un cylindre asymptote et que la courbure géodésique totale de la ligne λ tend vers zéro lorsque cette ligne s'éloigne indéfiniment [1].

Dans l'étude des géodésiques, le cas des nappes non évasées constitue une sorte de cas singulier ou de cas limite offrant des difficultés spéciales un peu analogues à celles qu'introduit la présence d'une racine double de l'équation en s dans la réduction des substitutions linéaires.

Les surfaces à courbures opposées connues jusqu'alors étaient toutes à connexion simple ou double. Or, les résultats relatifs aux géodésiques ne prennent leur forme la plus remarquable que quand l'ordre de connexion est supérieur à deux. Il importait, par conséquent, de montrer l'existence de surfaces régulières à courbure négative, à connexion plus ou moins élevée et à nappes infinies toutes évasées. Divers procédés, sur lesquels je n'insisterai pas, permettent de former de telles surfaces.

Les résultats dont j'ai parlé jusqu'ici peuvent être continués dans diverses directions. Entraîné par d'autres recherches, je me suis contenté de signaler sommairement (26, 27) deux de ces extensions. L'une d'elles

[1] La démonstration donnée de ce dernier fait dans mon Mémoire (25, p. 37) est soumise à quelques restrictions; j'ai, dans mon enseignement au Collège de France (1897-1898), démontré la même proposition en toute généralité.

est mentionnée dans l'Introduction (p. 14); c'est celle qui est relative au cas de plusieurs variables.

La seconde vise spécialement les géodésiques de la quatrième catégorie. Étant donnée une telle géodésique, il y aurait lieu d'examiner la loi suivant laquelle se succèdent les géodésiques fermées dont elle se rapproche successivement. Mais cette recherche serait très ardue si l'on n'était mis sur la voie de la loi cherchée par l'examen d'un cas où les géodésiques soient connues. Il semble, au premier abord, que les cas où l'intégration peut s'effectuer ne puissent jamais offrir les dispositions compliquées dont nous avons parlé plus haut. Il existe cependant un exemple de cette espèce, lequel est fourni par certaines multiplicités liées à la théorie des groupes fuchsiens [1] : on peut alors obtenir aisément la loi de succession demandée. Il resterait à savoir si la loi ainsi trouvée peut s'étendre au cas général.

Équations aux dérivées partielles. Physique mathématique.

Un autre sujet de recherches que j'ai simplement indiqué jusqu'ici, mais que je compte développer un jour, est mentionné dans une courte Note (30) sur *les Invariants intégraux et l'Optique*.

La théorie des invariants intégraux de M. Poincaré reçoit, dans ce Travail, une application assez différente de toutes celles qui en ont été fournies jusqu'à présent. On sait que l'un des problèmes fondamentaux de l'Optique géométrique est le suivant, posé par M. Bruns [2] :

Trouver les lois de correspondance entre rayons lumineux qui peuvent être obtenues par une série de réflexions et de réfractions.

En particulier, M. Bruns établit qu'une telle correspondance ne peut être ponctuelle (autrement dit *aplanétique*, dans la terminologie des physiciens) sans se réduire à une similitude. Il semblait bien probable, *a priori*, que le rapport de similitude dût alors nécessairement être égal à 1; mais cela ne résultait pas du raisonnement de M. Bruns. Or c'est ce que la théorie des invariants intégraux permet de démontrer aisément.

---

[1] On sait que cette théorie avait depuis longtemps conduit M. Poincaré à l'introduction des ensembles parfaits non continus. La considération des multiplicités dont nous parlons conduit à considérer les ensembles ainsi trouvés par M. Poincaré comme un cas particulier de ceux que nous avons rencontrés dans ce qui précède.

[2] *Das Eikonal* (*Abhandlungen der Sächs. Gesellsch.*, t. XXI; 1895).

Ce résultat est moins intéressant en lui-même que parce qu'il montre la théorie dont nous parlons comme capable de contribuer à la solution générale du problème de M. Bruns.

Les autres recherches que j'ai faites dans le domaine de la Physique mathématique ont toutes été développées dans mon enseignement du Collège de France ou sont en rapport étroit avec cet enseignement.

J'ai commencé par approfondir la théorie de la propagation des ondes à laquelle s'attache le nom d'Hugoniot.

A la vérité, l'origine de cette théorie doit être cherchée un peu plus haut; il faut, semble-t-il, la faire remonter à deux Mémoires de M. Christoffel, insérés aux *Annali di Matematica* (¹) et dans lesquels l'auteur prend pour point de départ le Mémoire connu de Riemann : *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*. Cette circonstance se trouve, en l'espèce, avoir un inconvénient : M. Christoffel s'attache, en effet, aux ondes de choc, dont l'existence a été découverte par Riemann. Or celles-ci constituent un cas singulier dont l'étude doit logiquement suivre et non précéder celle des ondes d'accélération. En raison même de la difficulté particulière offerte par le cas qu'il traite, l'auteur est conduit à se limiter aux discontinuités infiniment petites, ce qui diminue la portée de son analyse. Par contre, M. Christoffel se préoccupe de la signification géométrique des résultats, laquelle a été laissée de côté par Hugoniot. Mais une notion fondamentale appartient à ce dernier : c'est celle de *compatibilité*, dont la nécessité ne paraît pas avoir été aperçue par M. Christoffel.

Dans le cours professé en 1898-1899, j'ai établi la théorie cinématique (*voir* l'Introduction, p. 16) des discontinuités dont il s'agit.

Auparavant, j'avais exposé les principaux résultats acquis relativement au second des trois problèmes de la théorie des fonctions harmoniques, celui où l'on donne sur la frontière, non les valeurs de la fonction cherchée elle-même, mais celle de sa dérivée normale (problème hydrodynamique). J'ai été amené à compléter quelques-uns de ces résultats, particulièrement en ce qui concerne les fonctions auxquelles Fr. Neumann et M. Klein font jouer, pour le problème en question, le rôle que remplit la fonction de Green pour le problème de Dirichlet. On peut montrer, à cet

(¹) 2e série, t. VIII; 1877.

égard, qu'il est inutile de compliquer la fonction de Neumann, comme l'a fait M. Klein, pour obtenir une expression qui reste inaltérée par l'échange des points dont elle dépend : il suffit de préciser convenablement la définition de cette fonction [1].

J'ai ensuite considéré le mouvement rectiligne d'un gaz [2] et discuté le curieux phénomène de choc spontané découvert par Riemann et par Hugoniot. L'équation du nouveau mouvement qui prend naissance dans cette circonstance représente une surface à arête de rebroussement, de sorte qu'il s'engendre une nouvelle intégrale de l'équation du problème, munie d'une ligne de singularités et qui est représentée par la combinaison de deux développements en série, l'un à une variable (donnant l'équation de l'arête de rebroussement inconnue), l'autre à deux variables. Seulement, on ne démontre pas, par ce procédé, la convergence des séries ainsi obtenues, l'application directe du calcul des limites étant probablement impraticable. Il existe, heureusement, un autre moyen d'arriver au but, qui est de faire disparaître la singularité par une transformation de contact. Il faut toutefois observer qu'on serait ainsi conduit à un problème d'un genre nouveau, analogue à celui qui consisterait à déterminer une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre par la condition de couper deux surfaces données sous des angles donnés.

Une question qui se pose naturellement est la suivante : Supposons le

---

(1) Une remarque analogue s'applique à la résolution de l'équation $\Delta_2 u = F$ (où Δ_2 est le second paramètre différentiel de Beltrami et F une fonction donnée). Le rôle de la fonction de Green peut alors être joué par une fonction ayant *un seul* point singulier et satisfaisant, non à l'équation $\Delta_2 u = 0$, mais à l'équation $\Delta_2 u = \text{const.}$, et on peut déterminer cette fonction de manière à obtenir un théorème d'échange analogue à celui dont il vient d'être question. Par exemple, sur la sphère, la fonction cherchée est $\log \sin \frac{\theta}{2}$ (θ étant la colatitude). Ces résultats s'appliquent d'ailleurs au problème hydrodynamique : ils permettent de ramener ce dernier au problème de Dirichlet et à des quadratures, pour le volume compris entre deux sphères concentriques.

(2) Ce mouvement, lorsque la loi de compressibilité est la loi adiabatique, dépend, comme on sait, de l'équation d'Euler et de Poisson. On peut se demander ce qui arriverait si le gaz se comprimait d'après la loi de Mariotte. L'équation aux dérivées partielles qui interviendrait alors est celle des télégraphistes. On est ainsi conduit à regarder cette dernière comme un *cas limite* de la première. Bien entendu, le fait que la fonction de Bessel est une forme limite de fonction hypergéométrique se déduit immédiatement du précédent.

phénomène de Riemann-Hugoniot produit dans un tube indéfini dans un sens. Deux ondes vont se produire : l'une des deux ira en rétrogradant et finira par rencontrer le piston sur lequel elle se réfléchira. Après cette réflexion (du moins dans certaines conditions), cette nouvelle onde rattrapera la première. Leur rencontre produira un nouveau système de deux ondes, d'où une nouvelle réflexion, et ainsi de suite. On peut se demander si les états de mouvement qui se succèdent ainsi tendent vers un état limite. On ne saurait aborder actuellement cette question dans sa généralité, puisque cela supposerait la discussion complète du phénomène de Riemann-Hugoniot. Mais il est un cas où l'on peut obtenir la solution : c'est celui qui a été considéré en particulier par Hugoniot et où la loi de mouvement du piston est telle que toutes les ondes successivement produites se rattrapent en même temps : si le piston, en accélérant son mouvement d'après cette loi, atteint une certaine vitesse V et garde ensuite cette vitesse, on constate que la question posée tout à l'heure doit être résolue affirmativement : le mouvement du gaz tend vers un état limite, celui qui aurait existé si le piston, d'abord au repos, avait pris brusquement la vitesse V.

Dans le Cours professé en 1899-1900, j'ai appliqué la théorie précédemment développée à l'Hydrodynamique à trois dimensions, pour laquelle Hugoniot s'était contenté d'assigner la vitesse de propagation de l'onde sans s'inquiéter de la question de compatibilité. On a vu plus haut (Introduction, p. 17) quelques-uns des résultats qui apparaissent lorsqu'on traite cette dernière. J'ajouterai simplement la remarque suivante : la vitesse de propagation de l'onde n'est déterminée par Hugoniot qu'au signe près. Il y aurait donc deux sens de propagation possibles entre lesquels la continuité déciderait seule (en supposant cette continuité démontrée). La formation des conditions de compatibilité fait voir les choses sous un tout autre jour : elle montre la vitesse cherchée comme la solution commune de plusieurs équations du premier degré, lesquelles doivent être concordantes s'il y a compatibilité; dans le cas contraire (lequel doit, bien entendu, être regardé comme exceptionnel), les deux propagations de sens contraires dont je viens de parler se produisent, en général, à la fois et peuvent même être accompagnées d'un glissement des deux couches aériennes l'une sur l'autre.

Après avoir également appliqué la théorie aux mouvements élastiques

avec déformation finie ([1]), j'ai exposé les relations qui existent entre la théorie d'Hugoniot et la théorie générale des caractéristiques. Je me contenterai de renvoyer à l'Introduction relativement aux résultats que j'ai établis dans cette dernière voie. J'insisterai, par contre, sur certaines des analogies que l'on doit noter entre les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles et les équations à caractéristiques imaginaires. Pour ces dernières, pour l'équation de Laplace, par exemple, on sait que le problème de Cauchy n'est pas possible, dans le cas général ([2]). Au contraire, pour l'équation du son,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

c'est au problème de Cauchy que s'applique la solution bien connue de Poisson. Mais il faut tenir compte du rôle essentiel que joue dans ces problèmes le choix de la multiplicité initiale. Pour Poisson, cette multiplicité n'est autre que le plan $t = t_0$. D'une manière plus générale, supposons que la multiplicité initiale satisfasse à la condition d'être *extérieure au cône caractéristique qui a pour sommet un quelconque de ses points*. Dans ce cas, non seulement les formules de Poisson et de Kirchhoff donneront en chaque point la valeur de la solution, mais on peut faire la synthèse de cette solution, c'est-à-dire montrer qu'elle satisfait effectivement aux conditions du problème.

Si, au contraire, on considère le problème traité par Kirchhoff et dans lequel la multiplicité fondamentale, représentée par une équation entre x,

---

([1]) J'ai été conduit, en particulier, à trouver pour de telles déformations les conditions de stabilité de l'équilibre interne et à constater qu'elles coïncident avec les conditions de réalité des vitesses de propagation.

([2]) Le problème de Cauchy est celui qui consiste à trouver une solution d'une équation aux dérivées partielles, connaissant (dans le cas du second ordre) les valeurs de la fonction cherchée V et de ses dérivées premières sur une surface donnée : par exemple, les valeurs de V et de $\frac{\partial V}{\partial x}$, pour $x = 0$.

Je signalerai, dans cet ordre d'idées, la question suivante : *Soit une solution inconnue* V *de l'équation de Laplace. On donne la distribution (non analytique) des valeurs de* V *pour* $x = 0$. *Quelle devra être la distribution des valeurs de* $\frac{\partial V}{\partial x}$ *pour que le problème soit possible?* La réponse à cette question est très simple et s'obtient sans aucune difficulté; mais la méthode que l'on est conduit à employer est sans doute susceptible de rendre des services dans d'autres circonstances.

y, z seuls, *coupe le cône caractéristique* qui a pour sommet l'un quelconque de ses points, on obtient encore, par les formules de Kirchhoff, les valeurs de la solution s'il en existe une; mais la synthèse est impossible et, de fait, une seconde série de formules, également établies par Kirchhoff, montre qu'il y a une infinité de conditions de possibilité.

Le cas de Kirchhoff ne correspond pas aux conditions ordinaires du problème de Cauchy, car l'équation $F(x, y, z) = 0$ de la multiplicité initiale est supposée représenter une surface fermée. Prenons donc le cas où la surface $F(x, y, z) = 0$ est ouverte : soit, pour fixer les idées, $F = x$. Cette fois, les formules de Kirchhoff ne donnent aucun résultat. Mais si l'on prend les données initiales indépendantes de t, on voit immédiatement que le problème est nécessairement, dans le cas général, soit impossible, soit indéterminé.

Il est un peu plus difficile de décider d'une manière rigoureuse entre ces deux dernières hypothèses : autrement dit, de juger si l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

admet une intégrale (non analytique) telle que V *et* $\frac{\partial V}{\partial x}$ *soient nuls pour* $x = 0$. On y parvient [1] en ramenant la question à la suivante : *Existe-t-il une fonction* U, *non identiquement nulle, telle que les intégrales* $\int U\, dS$ *et* $\int \frac{\partial U}{\partial x} dS$ *s'annulent toutes deux lorsqu'on les étend à la surface de n'importe quelle sphère ayant son centre dans le plan* $x = 0$? — Question qui se résout par la négative. Il est donc établi que le problème de Cauchy, dans les conditions qui viennent d'être indiquées, est, en général, impossible, tout comme si l'équation était à caractéristiques imaginaires.

On observera qu'il y a là à la fois une analogie et une différence avec ce qui se passe pour le cas de deux variables indépendantes, dans lequel, étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles et distinctes, et une courbe qui est coupée par les caractéristiques de l'un des systèmes en deux points, on peut [2] se donner

---

[1] Ce résultat est encore inédit.

[2] Le fait en question résulte d'une proposition démontrée par M. Picard dans le tome IV des *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. Darboux (Note I, n° 5, p. 361-362). Toutefois, j'ai dû (31) compléter cette proposition en faisant voir que la solution du problème traité, à l'endroit cité, par M. Picard est unique.

l'inconnue elle-même, ainsi qu'une de ses dérivées sur une partie C_1 de la courbe, mais un seul de ces deux éléments sur l'autre partie C_2, ou l'inverse (C_1 et C_2 pouvant être échangées). Dans le cas des ondes sphériques, on doit également diviser la multiplicité initiale en deux parties correspondant aux deux arcs de courbe qui viennent d'être considérés; mais les rôles respectifs de ces deux régions sont déterminés *a priori* et ne sauraient être échangés.

Une remarque d'ordre différent conduit encore à un rapprochement entre les deux catégories d'équations. M. Delassus a montré qu'une intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ne peut admettre une ligne singulière (du moins lorsque cette singularité appartient aux espèces les plus usuelles), si cette ligne n'est pas une caractéristique; et cette proposition s'étend d'elle-même aux surfaces singulières, dans le cas de plusieurs variables indépendantes.

Inversement, j'ai constaté qu'étant donnée une ligne (ou surface) caractéristique $f = 0$, laquelle est supposée sans points singuliers dans le domaine que l'on considère, on peut aisément trouver pour l'équation proposée des intégrales telles que

$$P \log f + Q, \quad \frac{P}{f} + P_1 \log f + Q$$

où P, P_1, Q sont des fonctions régulières.

Ces intégrales sont en relation évidente avec celles qu'on doit former (ainsi que l'a remarqué M. Picard) pour étendre à une équation du second ordre quelconque ([1]) les résultats que fournit, pour l'équation de Laplace, l'introduction de la fonction $\log r$: intégrales qui sont de la forme $P \log r + Q$ (P et Q étant toujours des fonctions régulières). Celles-ci s'expriment aisément en fonction des premières, dans le cas où les coefficients de l'équation donnée sont analytiques.

Cette méthode est, comme on le voit, inférieure à celle de M. Picard en ce qu'elle suppose les coefficients analytiques; mais elle a l'avantage d'être plus rapide et surtout de s'appliquer, sans aucune modification, aux équations complètes (renfermant les dérivées du premier ordre) ([2]).

([1]) A deux variables indépendantes et à caractéristiques imaginaires.

([2]) En particulier, elle démontre immédiatement ce théorème de M. Picard : *Une équation du second ordre à deux variables indépendantes, à caractéristiques imaginaires et à coefficients analytiques, n'admet que des intégrales analytiques.*

On peut d'ailleurs espérer arriver, par cette voie, à un résultat analogue pour les équations à trois variables, en combinant la méthode précédente avec celle qu'a indiquée récemment M. Fredholm.

Si maintenant nous passons au cas des caractéristiques réelles (le nombre des variables étant de nouveau supposé égal à deux) [1], il est clair que la forme d'intégrale qui correspond à celle qu'a considérée M. Picard sera

$$u = \mathrm{P}\log[(x-x_0)(y-y_0)] + \mathrm{Q}.$$

La détermination de la fonction P résulte évidemment des considérations rappelées tout à l'heure. Or cette détermination conduit à la conséquence suivante : *La fonction* P *n'est autre que la fonction fondamentale de Riemann.* On voit ainsi, sous un point de vue nouveau, l'analogie qui existe entre cette dernière et les fonctions qui remplissent le même rôle pour le cas des caractéristiques imaginaires.

[1] Il n'est plus nécessaire de supposer les coefficients analytiques.

CHAPITRE III.

Algèbre. — 34. Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences,* 26 juin 1893).

35. Résolution d'une question relative aux déterminants (*Bull. des Sc. math.,* t. XVII; septembre 1893).

36. Sur l'élimination (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences,* 10 décembre 1894).

37. Mémoire sur l'élimination (*Acta mathematica,* t. XX; 1896).

38. Sur la démonstration d'un théorème d'Algèbre (*Procès-Verbaux Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux,* 1er avril 1897).

39. Sur les conditions de décomposition d'une forme ternaire (*Ibid.,* 13 mai 1897).

40. Sur les conditions de décomposition des formes (*Bull. de la Soc. math. de Fr.,* t. XXVII; 1899).

Géométrie. — 41. Recherche des surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion (*Bull. des Sc. math.,* 2e série, t. II; mai 1888).

42. Sur une congruence remarquable et sur un problème fonctionnel qui s'y rattache (*Procès-Verbaux Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux,* 14 février 1895).

43. Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent (*Ibid.,* 4 juin 1896).

44. Sur la généralisation du théorème de Guldin (*Bull. de la Soc. math. de Fr.,* 7 décembre 1898).

45. Sur les éléments linéaires à plus de deux dimensions (*Bull. des Sc. math.;* 1901).

46. Sur les réseaux de coniques (*Ibid.;* 1901).

Analyse. — 47. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences,* 11 décembre 1893).

48. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes [*Acta mathematica,* t. XXVIII; 1894 (avec Note additionnelle)].

49. Sur l'expression du produit $1.2.3\ldots.(n-1)$ par une fonction entière (*Bull. des Sc. math.,* 2e série, t. XIX; 1895).

50. Sur une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler (*Ibid.,* 2e série, t. XX; 1896).

51. Sur les éléments infinitésimaux du second ordre dans les transformations ponctuelles (*Procès-Verbaux Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux,* 19 décembre 1895).

52. Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles (*Congrès international de Zurich,* août 1897).

Mécanique. — 53. Sur les mouvements de roulement (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences,* 23 avril 1894).

54. Remarque sur les rayons de courbure des roulettes (*Procès-Verbaux Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux,* 19 avril 1894).

55. Sur le théorème de Jacobi relatif au mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe (Mémoires, *Ibid.*, 19 juillet 1894).
56. Sur les mouvements de roulement (Procès-Verbaux, *Ibid.*, 4e série, t. V; 1895).
57. Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales (*Ibid.*, 7 février 1895).

[Ces deux travaux (nos 56 et 57) ont été réimprimés dans le Volume de M. Appell, *Les roulements en Dynamique* (Collection *Scientia*).]

58. Sur le tautochronisme (*Procès-Verbaux Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 7 février 1895).
59. Sur la précession dans le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XIX; 1895).
60. Sur la stabilité des rotations d'un corps solide pesant (Association française : *Congrès de Bordeaux*, 1895).
61. Sur les principes fondamentaux de la Mécanique (*Procès-Verbaux Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 18 mars 1897).

Philosophie et Enseignement. — 62. Leçons de Géométrie élémentaire (*Géométrie plane*). Paris, Armand Colin; 1898.

63. Leçons de Géométrie élémentaire (*Géométrie dans l'espace*). Armand Colin; 1901.
64. Note sur l'induction et la généralisation en Mathématiques (*Congrès international de Philosophie*, Paris, 1900).

Algèbre.

Parmi les résultats qui ne se rattachent pas directement aux matières exposées dans les deux Chapitres précédents, il en est un qui appartient au domaine de l'Algèbre et sur lequel je voudrais attirer un instant l'attention. C'est un théorème (34, 35) qui donne le maximum du module d'un déterminant quelconque n, lorsqu'on donne une limite supérieure A du module des éléments.

Ce maximum est $A^n n^{\frac{n}{2}}$. Il est effectivement atteint : le plus grand déterminant satisfaisant à la condition indiquée n'est autre que le déterminant de Vandermonde formé avec les racines de l'équation binome $x^n - A^n = 0$. Mais cette solution peut ne pas être la seule : pour certaines valeurs de n, on trouve facilement une très grande variété de déterminants possédant la même valeur maxima $A^n n^{\frac{n}{2}}$. D'autre part il est remarquable que, si n n'est pas divisible par 4, le déterminant maximum ne peut pas être à éléments réels.

Le théorème peut s'énoncer sous cette forme un peu plus générale :

Soient S_1 *la somme des carrés des modules des éléments de la première*

colonne, S_2 *la somme analogue pour la seconde...;* $S_k, \ldots,$ *la somme des carrés des modules des éléments de la colonne de rang k. Le module du déterminant est au plus égal à* $\sqrt{S_1 . S_2 \ldots S_n}$.

La question ainsi résolue paraissait offrir une certaine difficulté et, d'autre part, ne peut manquer de se présenter dans les recherches modernes où les déterminants d'ordre quelconque jouent un si grand rôle. En fait, sa solution a été employée depuis dans plusieurs travaux, entre autres dans un Mémoire publié récemment par M. Fredholm sur le problème de Dirichlet. L'analyse de M. Fredholm repose sur l'introduction d'une certaine fonction développée en série de Maclaurin et sur le fait que cette fonction est entière; or on démontre ce dernier fait en appliquant le théorème précédent aux coefficients, lesquels contiennent des déterminants d'ordre de plus en plus élevés.

36, 37, 39, 40. La méthode des fonctions symétriques permet d'opérer l'élimination de n inconnues entre $n+1$ équations algébriques. Dans cette méthode, les calculs à effectuer varient avec l'ordre dans lequel on considère les équations données. Quelle influence cet ordre a-t-il sur le résultant obtenu? J'ai constaté que celui-ci ne peut être modifié que quant au signe, la conservation ou le changement de ce signe dépendant des degrés des équations données et de la nature de la permutation.

Outre son intérêt théorique évident, cette remarque a un certain nombre d'applications. Non seulement, en effet, elle permet d'évaluer les produits de la forme $\Pi R(x_i, y_i)$ (R étant une fraction rationnelle), étendus aux points x_i, y_i où se coupent deux courbes algébriques données, produits qui interviennent dans des théorèmes tels que ceux de Laguerre (*Comptes rendus*, t. LX, p. 71-73) et d'Elling Holst (*Math. Annalen*, t. XI); mais encore, moyennant un artifice simple, elle donne également, dans les mêmes conditions, les sommes $\sum R(x_i, y_i)$. On en déduit aisément l'expression des sommes d'intégrales qui font l'objet du théorème d'Abel. On retrouve ainsi, par une voie purement algébrique et élémentaire, les théorèmes établis à l'aide des fonctions fuchsiennes par leur auteur, M. Humbert, et à l'aide des fonctions abéliennes par MM. Appell et Goursat.

D'autre part, j'ai en même temps étudié la représentation symbolique du résultant, et, par là, j'ai été amené à considérer la théorie des formes sous un point de vue particulier : celui des résultats indépendants du nombre des variables. Il est clair que, sous ce point de vue, les facteurs

symboliques a_x interviennent seuls, à l'exclusion des facteurs déterminants. Mais, de plus, les facteurs de la forme a_x ont entre eux, tant que le nombre des variables ne dépasse pas une certaine limite, certaines relations qui disparaissent lorsque ce nombre s'accroît. On doit donc imaginer que les variables soient en nombre assez grand pour que les relations en question cessent de se présenter.

38. La démonstration classique d'un des théorèmes les plus importants de l'Algèbre, à savoir l'impossibilité de la résolution algébrique des équations au delà du quatrième degré, présentait une lacune à laquelle il est d'ailleurs aisé de remédier, mais que j'ai cru utile de signaler, en raison de l'importance du sujet.

Géométrie.

J'ai développé, dans le Chapitre II, les propositions démontrées d'une part sur la forme générale des géodésiques, d'autre part sur la forme des surfaces à courbure soit exclusivement positive, soit exclusivement négative. J'ai obtenu, sur diverses autres questions de Géométrie, les résultats suivants :

41. M. Fouret a démontré que le cercle est la seule courbe qui soit transformable en elle-même par une infinité d'inversions dont les pôles forment une ligne. Il y avait lieu de se poser une question analogue dans l'espace. On arrive aisément à cette conclusion que les surfaces qui soient anallagmatiques d'une infinité de manières sont les inverses de cônes ou de surfaces de révolution (ce qui revient au même lorsqu'on admet les inversions imaginaires).

Les cyclides de Dupin (et elles seules) admettent *deux* séries d'inversions qui les transforment en elles-mêmes.

42. La théorie des systèmes de complexes conduit à considérer deux congruences ayant entre elles la relation remarquable suivante : lorsqu'une droite de la première congruence et une droite de la seconde sont rectangulaires entre elles, elles se coupent. J'ai recherché si l'on avait ainsi les congruences les plus générales qui possèdent cette propriété. Cette question, qui offre un certain intérêt par la forme particulière du problème fonctionnel auquel elle conduit, se résout affirmativement.

43. La recherche des géodésiques des surfaces spirales revient, ainsi qu'il est établi dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux, à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre du type

$$y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=f(x).$$

M. Darboux a indiqué plusieurs formes auxquelles on peut ramener l'équation ainsi écrite.

Or, un autre mode de résolution de la question conduit à une forme d'équation toute différente de celles qu'a obtenues M. Darboux, à savoir

$$\frac{dv}{du}=\varphi(u^2+v^2).$$

L'équation $y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=f(x)$ *peut donc être ramenée au type que nous venons d'écrire.* Bien entendu, on arrive aisément à trouver une transformation de contact par laquelle s'opère le passage entre les deux équations précédentes.

44. On sait que le théorème de Guldin a été généralisé par M. Kœnigs, lequel a démontré que le volume engendré par un contour invariable donné, dans un mouvement donné, pouvait s'exprimer par le moment mutuel de deux systémes de segments dont l'un ne dépend que de la nature du mouvement, l'autre que de la forme du contour.

La signification du premier système de segments apparaît aisément. Il n'en est pas de même de celle du second, qui se présente au premier abord comme un pur résultat de calcul. J'ai montré que ce second système de segments a une interprétation géométrique bien simple : on l'obtient en composant des pressions normales réparties uniformément sur une surface quelconque limitée au contour donné.

38. L'espace ordinaire (euclidien ou non) possède cette propriété particulière que ses géodésiques peuvent être, d'une infinité de manières, assemblées de façon à former des surfaces, chacune de celles-ci étant telle que la géodésique qui passe par deux de ses points y est contenue tout entière.

On peut se demander s'il existe d'autres éléments linéaires possédant la même propriété.

Dans le cas de trois dimensions, si l'on demande que les surfaces géodésiques (c'est-à-dire chaque surface jouissant de la propriété indiquée)

soient en nombre triplement infini, on retombe sur l'espace ordinaire; mais il existe une infinité d'autres éléments linéaires possédant des surfaces géodésiques en nombre doublement infini, de manière que par chaque géodésique il passe une telle surface, et une seule.

39. Détermination de la cubique telle que le réseau de ses premières polaires coïncide avec un réseau de coniques donné. Les identités obtenues fournissent un théorème simple sur trois coniques quelconques.

Analyse.

47, 48, 52. Les théorèmes généraux de Du Bois-Reymond sur la croissance des fonctions m'ont permis de généraliser un théorème connu d'Abel en montrant que tout criterium de convergence pour les séries à termes positifs, fondé sur l'emploi des séries de comparaison, peut toujours être mis en défaut ([1]), même s'il introduit une suite indéfinie de séries de comparaison, pourvu que cette infinité soit dénombrable.

Ce résultat a appelé mon attention sur les ensembles composés de fonctions, lesquels s'introduisent d'ailleurs dans la plupart des questions qui préoccupent les géomètres de notre époque. J'ai indiqué (52), sans qu'elle ait d'ailleurs été résolue jusqu'ici, une question dont l'étude serait intéressante à cet égard, celle de l'ensemble qui *numère* un ensemble continu de fonctions.

49. Le produit $1.2.3\ldots(n-1)$ s'exprime par la fonction $\Gamma(n)$, c'est-à-dire par une fonction méromorphe. Des procédés bien connus permettent d'exprimer le même produit par une fonction entière : on obtient le résultat simple

$$1.2.3\ldots(n-1)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{U}'(n)\,\mathrm{U}(n+1)-\mathrm{U}(n)\,\mathrm{U}'(n+1)\right],$$

$$\mathrm{U}(x)=\frac{1}{\pi}2^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\pi x}{2}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right).$$

50. J'ai montré qu'on pouvait tirer les différentes formes de l'intégrale de l'équation d'Euler, y compris la forme entière exprimée par un déter-

([1]) Il est bien entendu que le criterium est *en défaut* sans être *inapplicable*, en prenant ces mots au sens que leur a donné M. Borel, dans son Mémoire bien connu sur les séries divergentes.

minant (Stieltjes, 1888), d'une origine unique, l'intégrale qui résulte immédiatement du théorème d'Abel.

51. Un problème résolu par M. Picard, dans des recherches bien connues (*Journal de Mathématiques*, 4[e] série, t. VIII; 1892) conduit à considérer les différents sous-groupes du groupe formé par les transformations qui lient les éléments infinitésimaux du premier et du second ordre, dans une transformation ponctuelle quelconque.

Une question intéressant les transformations de l'espace conduit de même à rechercher les sous-groupes *distingués* du même groupe.

Mécanique.

J'insisterai avant tout sur les travaux 53, 56, 37, relatifs aux *mouvements de roulement*.

Ces sortes de mouvements soulèvent, comme on sait, une grave difficulté de Mécanique analytique. En effet, les liaisons de roulement, se traduisant par des équations infinitésimales non intégrables, ne peuvent être employées qu'avec certaines précautions dans la formation des équations de Lagrange : on ne peut, en particulier, les employer pour transformer l'expression de la force vive, ainsi qu'on fait pour les équations en termes finis qui expriment les liaisons ordinaires.

J'ai cherché dans quelle mesure cette difficulté pouvait être tournée, et je suis arrivé à cette conclusion très simple que, lorsque les liaisons introduites dans un problème de Mécanique s'expriment par des équations aux différentielles totales, certaines de ces équations (ou certaines de leurs combinaisons) peuvent être employées sans aucune précaution, comme les équations en termes finis. C'est ainsi que, dans le roulement d'une courbe sur une surface, on peut traiter comme une équation en termes finis l'équation qui exprime l'absence de glissement longitudinal.

Outre son utilité en Mécanique, la formation des combinaisons dont je viens de parler présente une particularité analytique digne d'attention. On sait que, pour intégrer un système linéaire aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue (équivalent, comme il est bien connu, à un système d'équations linéaires aux différentielles totales), il convient tout d'abord de le rendre complet, ce qui se fait par l'application *répétée* de l'algorithme introduit par Poisson et considéré par Jacobi, Lie et Mayer : algorithme dont les propriétés d'invariance jouent un rôle fon-

damental en l'espèce. Le résultat obtenu en poursuivant *jusqu'à épuisement* les opérations de Lie intervient seul dans l'intégration du système aux dérivées partielles.

Il semble cependant que chacune des séries successives d'opérations ainsi effectuées puisse jouer un rôle dans l'étude du système, puisque chacune d'elles individuellement présente les propriétés d'invariance que nous venons de rappeler. C'est effectivement la *première* de ces séries qui fournit la solution du problème de Mécanique analytique dont j'ai parlé ci-dessus : il n'existe point, jusqu'ici, d'autre exemple d'un fait de cette nature.

59. Je mentionnerai encore d'une manière spéciale un Travail *sur la précession dans le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe,* lequel n'est d'ailleurs pas entièrement sans liaison avec le point de vue dont dérivent les travaux exposés au Chapitre II.

On sait que si, par l'axe d'un corps de révolution qui tourne autour d'un point fixe (situé sur cet axe) sous l'influence de la pesanteur, on mène un plan vertical, le corps peut prendre des mouvements tels que ce plan tourne toujours dans le même sens, mais que pour d'autres valeurs des vitesses initiales ce plan sera, au contraire, animé d'un mouvement alternativement direct et rétrograde. Dans ce cas, on peut se demander dans quel sens ce plan aura tourné, en fin de compte, au bout d'une période du mouvement; on peut même se demander si cette rotation totale ne pourrait pas être nulle; si, par conséquent, l'axe ne pourrait pas décrire un cône fermé auquel la verticale serait extérieure.

Cette question a été résolue par Halphen, lequel a démontré rigoureusement que la circonstance mentionnée en dernier lieu ne peut se présenter. Mais la démonstration d'Halphen fait appel à une discussion très minutieuse de fonctions elliptiques, introduisant des propriétés peu usuelles de ces transcendantes.

J'ai constaté que le même résultat peut, au contraire, être obtenu avec une même simplicité par un raisonnement direct, fondé sur l'application du théorème classique de Cauchy, relatif aux intégrales de fonctions de variables complexes. L'intégrale définie qu'il s'agit de discuter est alors immédiatement transformée en une autre dont le signe n'est pas douteux.

Le principe de cette nouvelle démonstration a été, d'ailleurs, employé depuis dans d'autres questions analogues. M. de Saint-Germain a pu ainsi remplacer par un raisonnement presque intuitif la démonstration qu'Halphen avait donnée d'une inégalité relative au pendule et qui laissait beau-

coup à désirer sous le rapport de la simplicité. J'ai eu moi-même à me servir de la même transformation dans un Travail (28) dont j'ai parlé plus haut (*voir* Chap. II, p. 37-38).

Je laisserai de côté, pour abréger, les remarques qui font l'objet des travaux (54, 55, 58), et je signalerai simplement les nos 60 et 61. Dans ce dernier article, je formule les premiers principes de la Mécanique, comme je le faisais depuis plusieurs années dans mon enseignement, en prenant pour base la définition de la masse tirée du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

L'article précédent (60) est consacré aux cas, étudiés par M. Staude, où le mouvement d'un corps pesant fixé par un *quelconque* de ses points se réduit à une rotation.

Philosophie et Enseignement.

62, 63. J'ai publié, dans la collection d'Ouvrages édités sous la direction de M. Darboux, un Traité de Géométrie. Sans insister longuement sur cet Ouvrage, d'un caractère tout élémentaire, je dirai quelques mots d'une Note insérée à la fin du premier Volume et consacrée à la *Méthode en Géométrie*. Je me suis efforcé de dégager, en ce qu'ils ont de plus général, les principes nécessaires de la recherche mathématique. Tout en étant exposés pour l'usage des commençants, ces principes, ainsi que l'expérience le démontre, conservent toute leur valeur dans des recherches plus élevées.

Je signalerai, dans le second Volume, une espèce particulière de Géométrie (qu'on pourrait appeler *hyperbolique*, si ce nom n'était souvent donné à la Géométrie de Lobatschewsky) à laquelle j'ai été amené par une question relative au mouvement rectiligne des gaz (*voir* Chap. II, p. 43) et qui est caractérisée par cette circonstance qu'un côté d'un triangle est toujours plus *grand* que la somme des deux autres (1).

---

(1) Dans un autre ordre d'idées, je signalerai ici une remarque que j'ai développée à plusieurs reprises dans mon enseignement :

On sait que Weierstrass a montré l'insuffisance du raisonnement indiqué par Riemann pour démontrer le principe de Dirichlet. Les exemples produits par Weierstrass ont été, depuis, reproduits par tous les auteurs qui se sont occupés

64. La *Note sur l'induction et la généralisation en Mathématiques* a pour objet une remarque que plusieurs des travaux publiés dans ces dernières années mettent en évidence et dont les recherches sur les géodésiques mentionnées au Chapitre II (p. 36-40) fournissent également une application. On avait, en effet, précédemment intégré l'équation des géodésiques pour plusieurs espèces de surfaces à courbures opposées, et l'on n'avait, sur aucune d'elles, rencontré les dispositions remarquables que nous avons décrites au Chapitre II : ces surfaces étaient toutes à connexion simple ou double. Rien, dans les cas déjà traités, ne faisait donc prévoir la complication qui devait se présenter dans d'autres cas.

---

de ces questions. On peut cependant s'étonner que l'existence d'autres exemples de même espèce, mais beaucoup plus simples et plus naturels, n'ait pas été remarquée. Considérons, pour fixer les idées, le problème de la ligne la plus courte entre deux points A, B : dans ce cas, le minimum existe. Mais si, maintenant, nous demandons la plus courte parmi celles qui joignent les deux points A, B, *et qui ont en ces points des tangentes données,* il est aisé de voir que l'on pourra trouver des lignes (par exemple, des arcs de coniques) satisfaisant aux conditions imposées et dont la longueur excédera d'aussi peu qu'on voudra celle de la droite AB. Ainsi, cette fois, *le minimum ne sera pas atteint,* et cela dans une question que *rien ne distingue, a priori,* de celles qui admettent une solution (surtout si l'on songe que l'on pourrait, au contraire, se donner les tangentes en A et B, si l'intégrale dont on cherche le minimum renfermait des dérivées du second ordre).

Au reste, on peut se rapprocher encore plus du problème de Dirichlet lui-même, en se demandant quelle est la plus petite valeur de l'intégrale

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz,$$

étendue à un volume S sur la frontière duquel V *et* $\dfrac{dV}{dn}$ doivent avoir des valeurs données.

Il est aisé de voir que ce minimum, lequel n'est pas atteint, est fourni par la fonction harmonique V_0 qui prend sur la frontière les valeurs V données. Si $F = 0$ désigne l'équation de la frontière, φ, une fonction quelconque satisfaisant, sur cette frontière, aux conditions données $\left(\text{tant pour V que pour } \dfrac{dV}{dn}\right)$, la fonction

$$V = \frac{FV_0 + \lambda\varphi}{F + \lambda}$$

donnera à l'intégrale considérée une valeur aussi voisine que l'on voudra de ce minimum, pour λ suffisamment petit.

On ne s'étonnera pas qu'il en ait été ainsi, si l'on observe que cette complication est manifestement un obstacle à l'intégrabilité de l'équation : il en résulte que, sans s'en douter, on l'avait exclue à l'avance par le fait même que l'on s'adressait à des problèmes intégrables.

Cette remarque a évidemment une portée générale. C'est elle qui est développée dans la Note en question.

29879 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.